En teori om induksjon og sannsynlighet

Morten Harboe Rognes

2019

© Morten Harboe Rognes 2019

§1 Innledning

Dette arbeidet består av to hoveddeler. I den første av disse delene fremsetter vi en teori om hvilke påstander det er fornuftig å akseptere gitt en viss evidens og kombinerer denne med en teori om sannsynlighet. Det er ikke uberettiget å si at det dreier seg om en teori om induksjon og sannsynlighet. I den andre delen av dette arbeid undersøker vi fra en formell synsvinkel en rekke av denne teoriens egenskaper og utdyper betraktelig hva som følger fra den. Den andre delen av dette arbeidet er derfor sterkt teknisk preget.

La oss først gi en skisse av grunnsetningene i den teorien vi fremsetter i Del I, §3.

De grunnleggende begrepene i den delen av denne teorien som har med aksepterbarhet å gjøre er predikatene "w er en logisk mulig verden" og "w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " Ved hjelp av disse predikatene definerer vi predikatet "x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens". Dette sistnevnte predikatet er derfor ikke er noe primitivt predikat.

Det grunnleggende begrep i den delen av teorien som har med sannsynlighet å gjøre er predikatet " z er sannsynligheten til det forhold utsagnet x beskriver gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens".

La oss bemerke at teorien fremstilles helt presist som en rent predikatlogisk teori og at den formelt sett er en utvidelse av den mengdeteoretiske teorien ZFC;u, Zermelo-Fraenkelsystemet utvidet med urindivider. Vi har i tidligere arbeider gjort utførlig rede for dette mengdeteoretiske system.

Når det gjelder grunnsetninger som har med mulige verdener å gjøre dreier det seg om to stykker, nemlig for det første at det finnes en mengde med mulige verdener og for det andre at mengden med mulige verdener er minst tellbart uendelige. Det bør bemerkes at vi identifiserer utsagn med mengder av mulige verdener og at det derfor følger at det vi kaller sannhetsmengden til et utsagn er identisk med utsagnet selv.

Grunnsetningene i teorien som angår den relasjon som består mellom to verdener der den første har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som den andre, vi kaller denne relasjonen for *enkelhetsrelasjonen*, er i hovedsak to, nemlig at denne relasjonen er refleksiv og transitiv. Når det gjelder akseptanserelasjonen, den relasjonen som består mellom to utsagn x og y hvis og bare hvis x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at y representerer all tilgjengelig evidens defineres den. Denne definisjonen sier at det er fornuftig å akseptere et utsagn x gitt at y representerer all tilgjengelig evidens hvis og bare hvis (i) det finnes noen enkleste verdener i sannhetsmengden til y og (ii) disse enkleste verdenene er inkludert i sannhetsmengden til utsagnet x. Som man ser kan den delen av vår teori som har med mulige verdener, utsagn og akseptanserelasjonen å gjøre bygges opp fra et ganske lite antall aksiomer, i hovedsak fem stykker.

Når det gjelder den delen av teorien som dreier seg om sannsynlighet er det en rekke ting som bør bemerkes. For det første bør man iakta at dersom et utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til et utsagn y utgjør mengden av alle de utsagn som har en viss sannsynlighet relativt til y en naturlig boolsk algebra. Videre skulle det være klart at dersom et utsagn har en viss sannsynlighet relativt til y er denne sannsynligheten et reellt tall som ligger

© Morten Harboe Rognes 2019

i intervallet [0,1]. Det skulle også være klart at dersom det finnes noe utsagn som har en sannsynlighet relativt til utsagnet y så er sannsynligheten til y relativt til seg selv lik 1. Videre skulle det være ukontroversielt at dersom to uforenelige utsagn har en viss sannsynlighet reltivt til y så er sannsynligheten til disjunksjonen av dem lik summen av sannsynlighetene til hver av dem. Disse prinsippene virker ukontroversielle og innlysende og er inkludert i vår teori.

Det er imidlertid en rekke andre prinsipper som kommer inn i bildet når man kombinerer akseptanse med sannsynlighet. Det er et karakteristisk trekk ved den teorien som presenteres her at den sier at dersom det er rasjonelt å akseptere et utsagn x relativt til utsagnet y så er sannsynligheten til utsagnet x lik 1 relativt til y såfremt det finnes utsagn som kan tilskrives sannsynlighet relativt til y. Hvis det derfor er rasjonelt å akseptere, la oss si Einsteins relativitetsteori, relativt til all den evidens vi har nå og det finnes utsagn som kan tilskrives en viss sannsynlighet relativt til denne evidens, må derfor Einsteins relativitetsteori tilskrives sannsynligheten 1 på basis av den evidens vi har. Dette prinsipp lar seg formalisere og er inkludert i vår teori.

En annen grunnsetning som binder akseptanse og sannsynlighet sammen er det følgende: Anta y er et utsagn som representerer all den evidens som foreligger. Da sier prinsippet at dersom et eller annet utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y så må det også finnes utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y.

I tillegg til disse prinsippene er det også en rekke andre som angår forbindelsen mellom akseptanse og sannsynlighet som vi finner det nødvendig å ta med. Men vi venter med omtalen av dem til §3 hvor vi gir en rigorøs definisjon av vår teori.

En siste gruppe med grunnsetninger inkluderer det såkalte multiplikative aksiom. Dette sier at dersom to utsagn x og z kan tilskrives en sannsynlighet relativt til utsagnet y og sannsynligheten for x relativt til y er større en null så gjelder det at sannsynligheten til konjunksjonen av x og z relativt til y er produktet av sannsynligheten for z relativt til konjunksjonen av x og y multiplisert med sannsynligheten for x relativt til y.

Denne grunnsetningen sammen med andre som er nær forbundet med det blir grundig diskutert og undersøkt ikke bare i den første delen av dette arbeid, men også i den andre delen.

Etter at vi har definert teorien helt eksakt gir vi i §5, §5.1 - §5.6 en rekke utstrakte kommentarer til den. For det første kommenterer vi den teorien om mulige verdener og utsagn som er en del av teorien. Dernest tar vi i forbindelse med akseptanserelasjonen opp en rekke temaer som har med evidens å gjøre og kommer i denne forbindelse inn på det som ofte kalles tesen om teorimangfoldet. Etter dette kommenterer vi det som her kalles for enkelhetsprinsippet og analyserer dette mer utførlig. Dernest nevner og drøfter vi i §5.4 en rekke eksempler på utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til den vitenskapelige evidens som vi er i besittelse av ved det nåværende tidspunkt. I det neste avsnittet går vi så videre og gir en generell definisjon av hva som forstås med en induktiv slutning. I forbindelse med denne definisjonen bør det nevnes at den er av en slik art at den utelukker at en induktiv slutning kan være logisk gyldig. En induktiv slutning kan imidlertid være rasjonelt akseptabel i den forstand at det utsagnet som utgjør konklusjonen i den induktive slutningen beskriver et forhold som det er rasjonelt å akseptere relativt til det utsagn som representeres av konjunksjonen av premissene. Siden predikatet "x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens" inngår som et grunnbegrep i

© Morten Harboe Rognes 2019

vår teori om akseptanse er det svært naturlig å definere en induktiv slutning som akseptabel på den måten vi nettopp har antydet. Dette innebærer at vi i den akseptanseteoretiske delen av vår teori kan utlede en lang rekke satser om hvilke induktive slutninger som er rasjonelt akseptable gitt at andre er det. Dernest formulerer vi det som vi oppfatter som en rimelig versjon av induksjonsproblemet og diskuterer hvorvidt det finnes visse induktive slutninger som det er innlysende at er rasjonelt akseptable. Når det gjelder denne delen med kommentarer til vår hovedteori avsluttes den med et avsnitt der vi gir en noe grundigere motivasjon for de sannsynlighetsteoretiske aksiomene.

Vi har nå gitt en forholdsvis kort oversikt over innholdet i den første delen av dette arbeid. La oss derfor gå over til å gi et riss av innholdet i den andre delen. Som nevnt tidligere er denne av en mer teknisk preget natur.

Vi definerer to typer av rent mengdeteoretisk strukturer. På den ene side har vi en klasse av strukturer som vi kaller *relative sannsynlighetsstrukturer*. En relativ sannsynlighetsstruktur er et trippel <I,R,C> der I er en ikke-tom mengde, R en preordning over I og C er en funksjon som oppfyller alle de krav som sannsynlighetsfunksjonen i vår teori oppfyller med hensyn på mengden av mulige verdener og enkelhetsrelasjonen som vi innfører i forbindelse med akseptanse.

Den andre klassen av strukturer er hva vi kaller for *preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom*. En slik struktur er et trippel <I,R,H> der I er en ikke-tom mengde, R en preordning over I og H er en funksjon som tilordner for hvert element w i I visse av delmengdene i den R-induserte ekvivalensklassen til w sannsynlighetsrom. Vi gir natuligvis helt presise definisjoner av disse to begrepene.

Er nå S=<I,R,C> en relativ sannsynlighetsstruktur definerer vi hva som menes med *den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S*. Vi betegner denne med $\varphi(S)$. Man kan vise at $\varphi(S)$ er entydig bestemt og at $\varphi(S)$ faktisk er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

Tilsvarende definerer vi, om S=<I,R,H> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, hva som menes med *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S.* Denne betegner vi med $\psi(S)$. Man kan igjen vise at $\psi(S)$ er entydig bestemt og at $\psi(S)$ faktisk er en relativ sannsynlighetsstruktur. Relasjonen φ er derfor en funksjon som avbilder klassen av relative sannsynlighetsstrukturer inn i klassen av preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Tilsvarende er relasjonen ψ en funksjon som avbilder klassen av preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom inn i klassen av relative sannsynlighetsstrukturer.

La nå Γ betegnes mengden av alle relative sannsynlighetsstrukturer og la på tilsvarende vis Φ betegne mengden av alle preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom.

Gitt disse definisjonene kan hovedresultatene i den andre delen av vårt arbeid sammenfattes slik: Man har (a) at funksjonen φ avbilder Γ en-entydig og på Φ, videre (b) at funksjonen ψ avbilder Φ en-entydig og på Γ og endelig (c) at funksjonen φ er omvendingen av funksjonen ψ og at funksjonen ψ er omvendingen av funksjonen φ.

Det meste av innholdet i den andre delen består i å gi detaljerte bevis for disse satsene. I tillegg gjør vi rede for hvordan disse resultatene gjør det mulig å formulere en alternativ aksiomatisering av den teorien om sannsynlighet og akseptanse vi har formulert i den første delen, og hvordan de ellers bidrar til å gi en en dypere innsikt i denne teorien.

© Morten Harboe Rognes 2019

DEL I

§2 Forkunnskaper

Det er en rekke arbeider som det vil være en fordel om leseren har satt seg inn i før vedkommende tar fatt på dette skrift. Som en generell redegjørelse for de forkunnskaper som trengs for å lese de arbeidene som denne forfatteren har skrevet kan det være hensiktsmessig å lese igjennom Rognes[8]. Når det gjelder notasjonen som denne forfatteren benytter er det viktig, det er nærmest et uomgjengelig krav, at man studerer Rognes [9], "Om notasjonen som benyttes i mine arbeider". Videre brukes i dette skrift alle de begreper av generell logisk- og mengdeteoretisk art som det er detaljert gjort rede for i Rognes [1], "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære". Her forklares blandt annet nøyaktig hva vi mener med et predikatlogisk språk med identitet (første-ordens språk) og hva som menes med en predikatlogisk teori (første-ordens teori). Dessuten gis en detaljert beskrivelse og definisjon av det mengdeteoretiske system vi benytter. Dette system kalles "Zermelo - Fraenkel systemet med urindivider", "ZFC;u", fordi det er fullt forenelig med den antagelse at det finnes entiteter som ikke er mengder, såkalte "urindivider". Videre defineres i dette skrift den mengdeteoretiske notasjon som vi uten videre, og uten omstendlige forklaringer benytter i dette arbeidet. Man kan derfor si at Rognes [1] forklarer det man kunne kalle rammeverket for det meste av det vi har skrevet.

Ved siden av disse arbeidene som gjør rede for det logiske og mengdeteoretiske system vi baserer teoriene i dette skrift på er det også viktig at leseren har satt seg inn i Rognes [2], "En teori om presise deskriptive utsagn" og Rognes [3], "En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn"

I tillegg til de sistnevnte arbeider som utdyper det utsagnsteoretiske grunnlag fordi de teoriene som fremstilles her, er det også viktig at leseren konsulterer de arbeidene vi har skrevet om akseptanse og sannsynlighet. Viktig i denne forbindelse er Rognes [6], "Aksepterbarhet og troverdighetsgrad" samt Rognes [7], "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner".[1]

La oss tilslutt forklare de mest brukte symbolene som benyttes i dette skrift. Uttrykkene "(Ax)" og "(Ex)" brukes som forkortelse for henholdsvis uttrykkene "For alle objekter x er det slik at" og "Det finnes minst et objekt x slik at". Vi bruker "→", "↔", "&", "v", og "¬" for de vanlige setningslogiske konnektivene: kondisjonal, bikondisjonal, konjunksjon, disjunksjon og negasjon. "(ix)" brukes som forkortelse for uttrykket "det objektet x som er slik at", med andre ord betyr "(ix)Fx" det samme som det objektet som har egenskapen F. Når det gjelder mengdeabstrakter benytter vi oss av notasjonen "Mg(x: Fx)". Dette uttrykket leses slik: "mengden av alle de objekter x som er slik at Fx". Bestemte

1 Vi finner det svært viktig å understreke at vi står i stor gjeld til de artiklene av Bengt Hansson som er oppført i referanselisten. Selvom vi etter fattig evne har forsøkt å bidra med egne resultater er hovedideen i den akseptanseteorien som presenteres her i alt vesentlig hentet fra Hansson [3] og de andre artilene av ham som vi har oppført, ie. Hansson [1],[2].

© Morten Harboe Rognes 2019

beskrivelser, ie. termer av typen "(ix)Fx" og mengdeabstrakter innføres kontekstuelt og elimineres etter de regler som er nøyaktig beskrevet i Rognes [1]. Når det gjelder vanlig brukt mengdeteoretisk notasjon nevner vi at uttrykket "<x,y>" betegner det ordnete par av objektene x og y tatt i denne rekkefølge. Snittet av to mengder x,y og unionen av to mengder x,y betegnes med henholdsvis "xΩy" og "xUy". Komplementet til en mengde x betegnes med "-x", og differansen mellom to mengder x og y betegnes med "x-y". Forøvrig bør det bemerkes at uttrykket "xêy" leses "x er et element i mengden y" og "M(x)" leses "x er en mengde". Videre bør det understrekes at vi bruker uttrykket "x Inkl y" som forkortelse for "mengden x er inkludert i mengden y", og uttrykket "x SInkl y" for det lengere uttrykket "mengden x er strengt inkludert i mengden y". La oss forøvrig nevne at "SN(x)" betegner snittet av alle de mengdene som er med i mengden x og at "UN(x)" betegner unionen av alle de mengdene som er elementer i mengden x. Tilslutt bemerker vi at dersom Δ er en mengde med utsagn (med endelig eller uendelig mange elementer) betegner "SNu(Δ)" det utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i Δ og uttrykket "UNu(Δ)" disjunksjonen av alle de utsagnene som er med i Δ.

§3 Den formelle fremstilling og definisjon av teorien.

Vi går nå over til den formelle og eksakte definisjonen av vår teori. Vi finner det imidlertid hensiktsmessig å introdusere noen begreper før vi går over til selve den formelle formuleringen av aksiomene i teorien. Som i tidligere arbeider betegner L;e det vi kaller språket for mengdelære. Dette er det språket av første orden med identitet som inneholder som eneste ikke-logiske predikater de to predikatene "x er en mengde" og " x er et element i mengden y". Disse to predikatene forkorter vi med henholdsvis "M(x)" og "xêy". For øvrig inngår i språket bare de vanlige kvantorene, all-kvantoren og eksistenskvantoren, de vanlige setningslogiske konnektivene og det rent logiske predikatet "x er identisk med y" som vi forkorter med "x=y". Alle setningene i språket L;e er bygd opp fra de nevnte predikater ved hjelp av de setningslogiske konnektivene og kvantorene på vanlig måte. Vi kaller predikatene "M(x)" og "xêy" for de *mengdeteoretiske* predikatene. Teorien ZFC;u(L;e) er den første-ordens teorien hvor språket er L;e og hvor de logiske aksiomene er et vanlig sett for første-ordenslogikk og hvor de ikke-logiske aksiomene er de vanlige ZFC;u- aksiomene som vi har spesifisert tidligere[2]. Anta nå Δ er en mengde med ikke-logiske predikater. Da betegner L;e(Δ) språket L;e utvidet med predikatene i Δ. ZFC;u(L;e(Δ)) er da teorien ZFC;u(L;e) med språket utvidet til L;e(Δ). Dette innebærer at alle instanser av utsondringsaksiomet og substitusjonsaksiomet i L;e(Δ) er med blandt aksiomene i ZFC;u(L;e(Δ)). Er θ en mengde med formler i L;e(Δ) betegner ZFC;u(L;e(Δ))[θ] teorien ZFC;u(L;e(Δ)) utvidet med formlene i θ som nye ikke-logiske aksiomer. Det bør noteres at de eneste slutningsreglene som inngår i våre teorier er modus ponens og regelen om universell generalisering.

Den teorien vi nå skal definere er av typen ZFC;u(L;e(Δ))[θ] der Δ er mengden av de predikater vi nå skal gjøre rede for. Det dreier seg om de følgende tre predikater: For det første predikatet "x er en logisk mulig verden". Dette forkorter vi med " MV(x)". For det andre inngår predikatet "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " i mengden Δ. Dette predikatet forkorter vi med

2 Teorien er presist definert i Rognes [1].

© Morten Harboe Rognes 2019

"Enk(w,w')". I stedet for å bruke det lengere og mer kompliserte uttrykket "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " skal vi tillate oss å bruke det kortere uttrykket " verdenen w er minst like enkel som verdenen w' " Det er da underforstått at det lengere uttrykket representerer et av selve grunnbegrepene i vår teori. Det kortere uttrykket skal brukes synonymt med dette lengere uttrykket. Selve den relasjon som betegnes av det binære predikatet Enk skal vi kalle for enkelhetsrelasjonen.

Det tredje predikatet som inngår i predikatmengden Δ er det følgende uttrykk: "z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger". Dette predikatet forkorter vi med "Cd(z,x,y)". Alternative lesemåter av dette predikatet er: "z er sannsynligheten til utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har", "z er den grad av rasjonell troverdighet som kan tilskrives utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har", "z er sannsynligheten til utsagnet x relativt til utsagnet y" eller " z er den rasjonelle grad av troverdighet til utsagnet x relativt til utsagnet y". Disse uttrykkene og varianter av dem vil, om de brukes senere, alltid bli brukt synonymt med det uttrykket som offisielt forkortes av "Cd(z,x,y)". Ingen andre predikater enn de tre vi nå har nevnt inngår i predikatmengden Δ.

La oss på dette punkt bemerke at vi innfører mengdeabstrakter og bestemte beskrivelser i L;e og L;e(Δ) på den måten som det er detaljert redgjort for i Rognes [1]. Dette innebærer at vi fritt vil bruke den mengdeteoretiske notasjon som er innført i Rognes [1] uten alltid å gjøre rede for dette. Vi minner imidlertid om følgende. Er α en åpen setning betegner Mg(x: α) mengden av alle de objekter x som oppfyller setningen α. Videre brukes "xΩy" for snittet av mengdene x og y, "xUy" betegner unionen av mengdene xog y. Videre betegner "Pt(x)" potensmengden til x, "UN(x)" betegner unionen av alle de elementene som er med i x. Tilsvarende betegner "SN(x)" snittet av alle de mengdene som er med i x. I begge disse to tilfellene forutsettes det at x er en mengde av mengder og at x derfor ikke inneholder urindivider, dvs. entiteter som ikke er mengder. Komplementet til mengden x med hensyn på mengden y betegner vi med "y-x" og inklusjonsrelasjonen mellom mengder betegnes med "Inkl". "x Inkl y" innebærer derfor at mengden x er inkludert i mengden y. Videre innebærer "Func(f)" at f er en funksjon, Rel(f) at f er en relasjon. Domenet til en relasjon f betegnes med "Dom(f)" og verdiområdet til relasjonen med "Rgn(f)". Hvis notasjon og mengdeteoretiske begreper brukes som ikke er eksplisitt definert i dette arbeidet kan man alltids finne formelle definisjoner i Rognes [1].

Vi har nå spesifisert språket til vår teori. Som man ser er dette L;e(Δ), det vil si språket for mengdelære, L;e, utvidet med de tre predikatene som inngår i Δ. Det som nå må gjøres er å spesifisere de aksiomene som inngår i vår teori, kort sagt de setningene i L;e(Δ) som inngår i den aksiommengden θ som vi vil utvide ZFC;u(L;e(Δ)) med.

La oss først starte med predikatet "MV(w)" ie. "w er en logisk mulig verden". Mengden av alle mulige verdener betegner vi med I. Vi setter med andre ord per definisjon at I = Mg(w: MV(w)). Når det gjelder mengden I postulerer vi bare to ting som begge virker intuitivt sett ytterst rimelige, nemlig for det første at I faktisk er en mengde - dette kan ikke utledes i ZFC;u(L;e(Δ)). med andre ord fra de rent logiske og mengdeteoretiske aksiomene som inngår i vår teori - og for det andre at I, mengden av mulige verdener , er minst tellbart uendelig. At det bare skulle finnes et endelig antall mulige verdener virker naturligvis

© Morten Harboe Rognes 2019

temmelig eiendommelig. I dette skrift skal vi betegne disse to aksiomene med hendholdsvis W1 og W2. De kan formuleres slik:

W1	(Ey)(M(y) & y= I)
W2	Card(I) >= Aleph;0

Den siste formelen uttrykker at kardinaltallet til mengden av logisk mulige verdener I er større eller lik det minste alephtallet, med andre ord at I er minst tellbart uendelig.

La oss nå gå over til de logiske lovene, de ikke-logiske aksiomene, som vi vil ta i betraktning i forbindelse med enkelhetspredikatet, dvs. predikatet "Enk(w,w')"

Er w en mulig verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' skulle det være åpenbart at w og w' er mulige verdener, ie. at w,w' êI. Vi oppfører dette som et nytt ikke-logisk aksiom, siden det ikke kan utledes fra noen av de aksiomene vi har nevnt så langt:

E1	Enk(w,w') → w,w' êI

Dette aksiomet skulle være fullstendig opplagt. Det er imidlertid to andre aksiomer om enkelhetsrelasjonen som vi også legger til. Det første sier at enhver logisk mulig verden har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som seg selv. Det andre aksiomet sier at enkelhetsrelasjonen er transitiv, det vil si at dersom w har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' og denne har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w" så vil w ha minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w". Disse to påstandene, som også virker fullstendig opplagte, kan formaliseres slik:

E2	(Aw)(wêI → Enk(w,w))
E3	Enk(w,w') & Enk(w',w") → Enk(w,w")

Det er nødvendig å introdusere noen definisjoner i forbindelse med predikatene og grunnsetningene som vi har nevnt ovenfor. I dette skrift er ikke begrepet utsagn noe primitivt begrep, med andre ord er ikke predikatet "x er et presist deskriptivt utsagn" noe primitivt predikat. Vi skal her identifisere mengden av utsagn med mengden av alle mengder av logisk mulige verdener. Med andre ord er enhver mengde som utelukkende inneholder mulige verdener et utsagn og omvendt. I det følgende betegner U mengden av utsagn og vi identifiserer U med potensmengden til mengden av mulige verdener, ie. Pt(I). Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 3.1	U = Pt(I)

hvor I naturligvis er definert som ovenfor. Gitt denne definisjonen av utsagn skulle det være klart at nullmengden, ø, representerer det kontradiktoriske utsagn og mengden av alle mulige verdener, I, representerer det nødvendig sanne utsagn. Vi sier at et utsagn x er sant i verdenen w hvis og bare hvis wêx. Man ser at ethvert utsagn som ikke er kontradiktorisk eller nødvendig sant er sant i noen verdener og usant i andre. Et slikt utsagn er derfor kontingent.

© Morten Harboe Rognes 2019

Vi skal i det følgende betegne enkelhetsrelasjonen Mg(<w,w'> : Enk(w,w')) med "R". Vi gir derfor den følgende definisjon:

Definisjon 3.2 $R = Mg(\langle w,w'\rangle : Enk(w,w'))$

Fra E2 og E3 følger da at R er en refleksiv og transitiv relasjon over I og derfor at R er det som kalles en preordning. Videre har vi ved hjelp av definisjonen og E1 at R Inkl IxI. Siden I er en mengde ifølge aksiom W1 følger det på grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene at R også er en mengde.

I forbindelse med R det to avledete relasjoner som må defineres, nemlig R* og Ekv;R. Disse er definert slik:

Definisjon 3.3

(i) $R^* = Mg(\langle w,w'\rangle: R(w,w') \,\&\, \neg R(w',w))$

(ii) $Ekv;R = Mg(\langle w,w'\rangle: R(w,w') \,\&\, R(w',w))$

Er derfor w og w' to mulige verdener har man følgelig at R*(w,w') holder hvis og bare hvis verdenen w har større grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn w'. Ekv;R(w,w') holder hvis og bare hvis w har nøyaktig den samme grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w'

Er x et utsagn betegner "Max(R,x)" mengden av de R-maksimale verdenene i x. Formelt sett er uttrykket "Max(R,x)" definert slik:

Definisjon 3.4 $Max(R,x) = Mg(y: y \hat{e} x \,\&\, (Az)(z \hat{e} x \rightarrow R(y,z)))$

Er yê Max(R,x) ser man at dette holder hvis og bare hvis y er et element i x og enhver verden z der utsagnet x er sant er slik at verdenen y er minst like enkel som verdenen z. Vi skal derfor om xêU, kalle Max(R,x) for de enkleste, mest koherente og harmoniske verdenene i utsagnet x. Mengden av alle de verdenene som er med i et utsagn skal vi kalle for utsagnets sannhetsmengde. Det følger fra dette og den definisjonen av utsagn som vi tidligere har gitt at et utsagn er identisk med sin egen sannhetsmengde. Er x et utsagn er derfor de enkleste verdenene i sannhetsmengden til x identisk med de R-maksimale elementene i x.

Fra definisjonene vi har gitt ovenfor samt det faktum at R er en preordning følger det at den avledete relasjonen Ekv;R er en ekvivalensrelasjon over I. Dette innebærer at den inndeler mengden av mulige verdener i en mengde av innbyrdes uforenelige og ikke-tomme ekvivalensmengder som samlet uttømmer I. Er w en mulig verden, ie. wêI, betegner vi den ekvivalensmengden som inneholder w med [w];R. Er to elementer i I, la oss si w og w', like enkle har vi derfor at [w];R = [w'];R. Er w blandt de enkleste verdenene i sannhetsmengden til utsagnet x, med andre har vi wêMax(R,x), har man også at Max(R,x) Inkl [w];R. Vi skal kalle de ekvivalensmengdene som er bestemt av enkelhetsrelasjonen R for *enkelhetsnivåene* over mengden av mulige verdener.

Det bør bemerkes at vi i det følgende vil bruke uttrykket "κ(x)" som forkortelse for uttrykket "Max(R,x)". Dette innebærer at vi ikke alltid eksplisitt refererer til den underliggende preordningsrelasjonen R. Dette vil i de aller fleste tilfelle ikke skape noen problemer fordi det fra konteksten lett vil fremgå hvilken underliggende relasjon det dreier

© Morten Harboe Rognes 2019

seg om.

Vi innfører nå predikatet "x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt"[3]. Vi forkorter dette predikatet med "Ba(x,y)". Dette predikatet er intet primitivt predikat i den teorien vi her gir en beskrivelse av, men innføres ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.5 $Ba(x,y) \leftrightarrow (x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq Max(R,y) \ \& \ Max(R,y)\ Inkl\ x)$

Gitt definisjonen av κ som vi ga ovenfor kan definiens i denne definisjonen formuleres med konsist som $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(y)\ Inkl\ x$. Fra definisjonen fremgår det at utsagnet x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt hvis og bare hvis det finnes en ikke-tom delmengde av sannhetsmengden til y med verdener som har maksimal grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som også er inkludert i sannhetsmengden til x.

Hvilke lover som kan utledes om relasjonen Ba på basis av denne definisjonen og de aksiomene vi har oppført om enkelhetsrelasjonen og mulige verdener skulle man få et relativt godt innblikk i om man studerer to av våre tidligere arbeider, "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner" samt "Akseptanse og troverdighetsgrad".[4] Det bør understrekes at det ikke er noe spesielt nytt og oppsiktsvekkende ved den definisjonen som vi har nevnt ovenfor og de grunnsetningene i teorien vi så langt har angitt. De er i vesentlige hentet fra en helt tilsvarende teori i deontisk logikk som er utarbeidet av den svenske logikeren Bengt Hansson.[5] Det eneste vi har gjort er å "omplante" den til mer vitenskapsteoretiske omgivelser, kort sagt vi gir en vitenskapslogisk fortolkning av den opprinnelige deontiske teori. Den sammenheng som teorien forøvrig står i i dette skrift står for vår egen regning.

Hva slags sanne setninger av typen Ba(x,y) kan man gi eksempler på? Vi skal senere, i §5.4 gi en rekke slike eksempler som intuitivt kan virke plausible. Vi tillater oss likevel å nevne noen av eksemplene her. La for eksempel utsagnet y representere alle de data som forskerere innen alle felt av naturvitenskapen har kjennskap til nå. La oss kalle dette utsagn for den totale fysiske evidens man har ved det nuværende tidspunkt. Da virker det ytterst rimelig å si at det er rasjonelt å akeptere, relativt til denne evidens, at Newtons lover holder tilnærmelsesvis, at Einsteins generelle relativitetsteori holder og at tall-løse andre fysiske og kjemiske lover holder. Med andre ord er det for eksempel fornuftig å akseptere utsagnet at Newtons lover holder tilnærmelsesvis relativt til den totale fysiske evidens man har ved det nuværende tidspunkt.

Fra dette kan man ikke slutte at det vil være fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den totale fysiske evidens man har om for eksempel to hundrede år. Fra det at Ba(x,y) holder kan man slett ikke logisk slutte at Ba(x,z) holder om z er et utsagn som strengt

3 Alternative lesemåter til dette predikatet som vil bli brukt her: "Utsagnet x bør aksepteres gitt at y representerer all evidens", "Utsagnet x bør aksepteres relativt til y", "Det er rasjonelt å akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y", "Det er rasjonelt å akseptere utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all evidens". Alle disse konstruksjonene vil bli brukt synonymt med det predikatet som vi nettopp har nevnt. Konstruksjonen "x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt" er det offisielle predikatet.

4 Se Rognes [7] og Rognes [6]

5 Se Hansson [3], side 394 - 396 som inneholder den mest vesentlige sammenfatningen av Hanssons teori. Dette innebærer ikke at ikke også de andre sidene i Hanssons artikkel inneholder utmerket stoff.

© Morten Harboe Rognes 2019

impliserer utsagnet y. Det eneste som påstås her at det er fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den totale fysiske evidens man har *nå*.

Vi vil i denne sammenheng ytterligere omtale et prinsipp som har blitt omtalt tidligere i innledningen. Forholdet er at *dersom det er foruftig å akseptere et utsagn x relativt til et annet utsagn y og det finnes utsagn som har en viss sannsynlighet relativt til y så er det slik at sannsynligheten til utsagnet x relativt til y er lik 1*. Grovere uttrykt, og uten at vi tar med forbeholdet som er nevnt, er det altså slik at dersom det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til y så er sannsynligheten til dette utsagnet x relativt til y lik 1. Fra dette og det vi tidligere har nevnt følger at dersom et eller annet utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til den totale fysiske evidens man har nå så må alle de teoriene og lovene som vi har nevnt tilskrives en sannsynlighet lik 1 relativt til denne evidens. Dette innebærer videre at for eksempel Einsteins generelle relativitetsteori, eller Ohms lov for den saks skyld, bør tilskrives sannsynligheten 1 relativt til den totale fysiske evidens man har nå. Man kan si at dette er som seg hør og bør. Hvilken mening gir det å tilskrive denne slags generelle teorier en sannsynlighet som f.eks. 0.95 eller 0.5? Ethvert tall mellom null og én virker ikke bare vilkårlig, men også umulig å begrunne på noe rimelig vis. Til enhver normal mengde med evidens vil det ikke bare finnes tellbart uendelig mange teorier som er forenelige med den, antallet må være overtellbart. Dette innebærer at dersom man ser på mengden av alle disse teoriene som et utfallsrom over hvilket man kan innføre en sannsynlighetsfunksjon må en uendelig mengde av dem tilordnes sannsynligheten 0. Men hvordan gjør man dette på en måte som ikke er totalt vilkårlig eller leder til uintuitive resultater?

Vi skal nå se på de grunnsetningene i teorien som har å gjøre med predikatet "Cd(z,x,y)", det vil si predikatet " z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger".

For det første skulle det være klart at dersom Cd(z,x,y) holder så har man at z er et reell tall mellom 0 og 1 og at x og y er utsagn Dette kan formaliseres slik:

D1 $\quad Cd(z,x,y) \rightarrow x,y \hat{e} U \ \& \ z \hat{e} Reell \ \& \ z \hat{e} [0,1]$

I denne formelen betegner uttrykket "Reell" mengden av de reelle tall. Det er velkjent at denne mengden kan defineres presist, og på en adekvat måte, ved hjelp av grunnbegrepene innenfor den mengdeteoretiske del av vår teori. Det samme gjelder uttrykket "[0,1]" som betegner det lukkede intervall begrenset av tallene 0 og 1. Sannsynligheten til et utsagn x relativt til et utsagn y vil følgelig alltid være et tall som er mindre eller lik 1 og større eller lik 0. Med andre ord har vi at dersom Cd(z,x,y) så gjelder det at $0 =< z =< 1$.

Finnes det z som er sannsynligheten til utsagnet x relativt til utsagnet y finnes det ett og bare ett slikt reelt tall z. Dette er også en grunnsetning. Setningen kan formaliseres slik:

D2 $\quad Cd(z,x,y) \rightarrow (E!z)\ Cd(z,x,y)$

Man ser at denne grunnsetningen impliserer at Cd kan oppfattes som en funksjon som har Mg(<x,y>: (Ez) Cd(z,x,y)) som domene og der verdiområdet er inkludert i intervallet [0,1]. Vi definerer funksjonen C ved:

Definisjon 3.6 $\quad C = Mg(<<x,y>,z>: Cd(z,x,y))$

© Morten Harboe Rognes 2019

Gitt denne definisjonen og grunnsetningene D1 og D2 er det lett å vise at
Dom(C) = Mg(<x,y>: (Ez) Cd(z,x,y)) og at Rgn(C) Inkl [0,1]. Merk at "Dom(C)" betegner domenet til funksjonen C og at "Rgn(C)" betegner verdiområdet til C. Man ser også lett at følgende holder: Er x,yêU → (<x,y>êDom(C) ↔ (Er)(r=C(x,y)) ↔ (Ez) Cd(z,x,y))

Mengen av alle de x der man har at at <x,y>êDom(C) skal vi kalle for domenet bestemt av y med hensyn på C. De følgende grunnsetninger sier at for ethvert utsagn y utgjør domenet bestemt av y med hensyn på C - dersom det er ikke-tomt- en mengde med utsagn som er lukket under negasjon og disjunksjon. Dette innebærer selvfølgelig også at området er lukket under de andre vanlige (endelige) boolske operasjoner som konjunksjon, kondisjonal og bikondisjonal:

D3 <x,y>êDom(C) → <Neg(x),y>êDom(C)
D4 <x1,y>, <x2,y>êDom(C) → <x1 U x2, y>êDom(C)

Vi har også at y er med i domenet til y med hensyn på C og at sannsynligheten til det nødvendige utsagn I relativt til y er lik 1, begge dele under forutsetning av at <x,y>êDom(C):

D5 <x,y>êDom(C) → <y,y>êDom(C)
D6 <x,y>êDom(C) → C(I,y) =1

Aksiomene D1 - D6 virker alle rimelige og uimotsigelige når man tenker nøye igjennom det betydningsinnhold som det er rimelig å tillegge predikatet "Cd(z,x,y)". Dette synes også å være tilfelle med den følgende grunnsetning:

D7 <x,y>êDom(C) → C(xΩy, y) = C(x,y)

Dette aksiomet sier at dersom et utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y så er sannsynligheten til x relativt til y lik sannsynligheten til konjunksjonen av x og y relativt til y. Det er vanskelig å se at det skulle finnes noen som helst holdbare innvendinger mot denne påstanden.

Vårt siste aksiom i denne gruppen er den følgende setning som har en usøkt likhet med Kolmogorofs tredje aksiom og som sier at dersom utsagnenen x1 og x2 er logisk sett uforenelige og begge kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y så er sannsynligheten av disjunksjonen av x1 og x2 relativt til y lik summen av sannsynligheten til x1 relativt til y og sannsynligheten til x2 relativt til y. Grunnsetningen kan formaliseres slik:

D8 <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & x1 Ω x2=ø. → C(x1 U x2,y) = C(x1,y)+C(x2,y)

Det kan også noteres at det som svarer til Kolmogoroffs første aksiom innenfor den rammen vi har satt opp her er grunnsetningen D1 og at det som svarer til hans andre sannsynlighetsteoretiske aksiom er grunnsetningen D6.

Vi har nå angitt en rekke aksiomer, nemlig de utsagnsteoretiske aksiomene W1 og W2, aksiomene for enkelhetsrelasjonen E1 - E3 og de grunnleggende aksiomene for den relative

© Morten Harboe Rognes 2019

sannsynlighetsfunksjonen, nemlig D1 - D8. Transformerer man disse formlene ved hjelp av de definisjonene vi har gitt slik at de utelukkende er formulert ved hjelp av de primitive predikatene i L;e(Δ) ser man at følgende holder: De ikke-logiske predikatene som inngår i formlene W1 og W2 når disse ekspanderes til formler i primitiv notasjon inneholder utelukkende de mengdeteoretiske predikatene og predikatet "x er en mulig verden". Når det gjelder grunnsetningene E1 - E3 er de ikke-logiske predikatene som inngår i disse formlene, ekspandert til formler i primitiv notasjon, utelukkende de mengdeteoretiske predikatene pluss predikatene "x er en mulig verden" og predikatet "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ". Endelig, når det gjelder grunnsetningene D1 - D8 er de ikke-logiske predikatene som inngår i disse formlene, ekspandert til formler i primitiv notasjon, utelukkende de mengdeteoretiske predikatene pluss predikatene "x er en mulig verden" og " z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger". Det følger fra dette at ingen av aksiomene vi så langt har formulert inneholder både det sannsynlighets-teoretiske predikatet "Cd(z,x,y)" og enkelhetspredikatet "Enk(w,w')".

Vi skal nå betrakte en rekke aksiomer som innholder begge disse predikatene (når de ekspanderes til primitiv notasjon) og som derfor forbinder den akseptanseteoretiske delen av teorien vi så langt har spesifisert med den sannsynlighetsteoretiske delen.

Før vi angir disse grunnsetningene skal vi tillate oss å innføre en viss terminologi som vi finner hensiktsmessig. Vi skal si at et utsagn y utgjør en *sannsynlighetsbasis* hvis og bare hvis det er slik at det finnes utsagn x som kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y. Med andre ord vil utsagnet y utgjøre en sannsynlighetsbasis hvis og bare hvis $(Ez)(Ex)(z = C(x,y))$. Videre skal vi si at et utsagn y utgjør en *akseptansebasis* hvis og bare hvis det finnes et utsagn x slik at Ba(x,y), med andre ord hvis og bare hvis det finnes et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y.

Den første grunnsetningen sier at dersom et eller annet utsagn har en viss sannsynlighet relativt til utsagn y, med andre ord at utsagnet y utgjør en sannsynlighetsbasis så må det også finnes et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til utsagnet y, med andre ord må utsagnet y være en akseptansebasis. Kortere formulert: dersom et utsagn utgjør en sannsynlighetsbasis må det også være en akseptansebasis. Grunnsetningen kan formaliseres slik:

F1 $<x,y> \hat{e} Dom(C) \rightarrow (Ez)Ba(z,y)$

La oss se på et eksempel. La y være konjunksjonen av alle de utsagn som forfatteren vet ved det nuværende tidspunkt. Blandt de forhold som vites å være tilfelle er at en person i min nærhet, Ole, nettopp har sittet med en terning i hånden og at han så har kastet den opp i været. Terningen har dernest dettet ned på gulvet og rullet inn under en kommode slik at det nå er umulig å se hva den viser. Dette innebærer at for eksempel påstanden, la oss kalle den x, at terningen viser en toer så vel som negasjonen av denne påstand, nemlig at den ikke viser en toer, er fullt ut forenelige med utsagnet y som representerer all den evidens forfatteren har i dette øyeblikk. Vi har altså at konjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y er konsistent, men også at konjunksjonen av negasjonen av x og y er konsistent. La oss anta at vi påstår at sannsynligheten for at x er tilfelle, gitt at utsagnet y representerer all evidens, er 1/6. Hvis

© Morten Harboe Rognes 2019

dette skal ha noen objektiv mening, og ikke bare skal være en subjektiv påstand som er grepet ut av løse luften, virker det ytterst rimelig å hevde at utsagnet y, som representerer totaliteten av det jeg vet i øyeblikket, impliserer en rekke utsagn som kan utgjøre evidens for denne sannsynligheten på 1/6. Ved ettertanke viser dette seg å være tilfelle. Jeg har kastet en terning tusenvis av ganger og aldri sett at det har vært mulig å forutse hva resultatet av neste eller de neste kastene vil bli, men jeg har iaktatt at den relative frekvens av det å få en toer ligger i nærheten av 1/6. Men det er ikke bare på grunn av dette at det er rimelig og gir objektiv mening å aksepetere at sannsynligheten til utsagnet x relativt til y er 1/6, men fordi det relativt til y, det vil si all den kunnskap jeg har nå, er fornuftig å akseptere som en generell statisk lov at dersom dersom man kaster en velbalansert terning et tilstrekkelig stort antall ganger vil den relative frekvens av de tilfelle der terningen viser en toer være ganske nært opp til (1/6). Generaliserer man fra dette eksemplet kan man si at dersom sannsynligheten til utsagnet x relativt til y er tallet a, så må x representere en instans av et mulig utfall i en statistisk lov som det er fornuftig å aksepetere relativt til utsagnet y, videre må x og negasjonen av x være forenelige med utsagnet y og endelig må det være fornuftig å aksepetere relativt til y at en instans av initialbetingelsene i den statistiske loven som svarer til x. Men dette innebærer at dersom C(x,y)=a for noe a så må det finnes utsagn som bør aksepteres relativt til y. Som man ser er dette nøyaktig hva grunnsetningen F1 uttrykker.

Den neste grunnsetningen har allerede blitt antydet og kommentert. Den sier at dersom et utsagn y utgjør en sannsynlighetsbasis så har ethvert utsagn som bør aksepteres relativt til y en sannsynlighet lik 1 relativt til y. Setningen kan formaliseres slik:

F2 $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C)). \rightarrow (Ba(x,y) \rightarrow C(x,y)=1)$

Vi har kommentert denne setningen tidligere og argumentert for dens plausibilitet. Det kan ikke være nødvendig å gjenta akkurat her de forhold som taler til fordel for denne påstanden. Vi går derfor videre med de tre andre grunnsetningene i denne gruppen som forbinder akseptanse og sannsynlighet.

Det følgende aksiom uttrykker at dersom utsagnet x kan tilskrives en sannsynlighet relativt til utsagnet y så er sannsynligheten til x relativt til y identisk med sannsynligheten til x relativt til sannsynligheten av konjunksjonen av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til y. Formalisert kan dette uttrykkes slik:

F3 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(x,y) = C(x,\kappa(y))$

I forbindelse med denne formelen minner vi om at $\kappa(y)$ er mengden av alle de enkleste verdenene i y, mao. at $\kappa(y) = Max(R,y)$. Det bør også bemerkes at det er lett å vise at dersom y utgjør en akseptansebasis så har man at Max(R,y) er konjunksjonen av sannhetsmengdene til alle de utsagn som bør aksepteres relativt til y, med andre ord at:

$Max(R,y) = SN(Mg(z: Ba(z,y)))$

Hvis derfor utsagnet x kan tilordnes en sannsynlighet relativt til utsagnet y har derfor ethvert ethvert utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y sannsynlighet lik 1 relativt til y. Dette gjør det rimelig å tro at konjunksjonen av alle disse utsagnene $\kappa(y)$ har sannsynlighet lik 1 relativt til y. I lys av dette synes det ytterst plausibelt at sannsynligheten til x relativt til y bør være den samme som sannsynligheten til x relativt til $\kappa(y)$. Det er litt løse overveielser av

© Morten Harboe Rognes 2019

denne natur, og dessuten det forhold at det er vanskelig å se at at F3 kan utledes fra våre tidligere aksiomer, som ligger til grunn for at vi fremsetter F3 som et eget aksiom.

Vårt neste aksiom sier at dersom utsagnet x har en viss sannsynlighet relativt til konjunksjonen av alle de utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y så har utsagnet x også en sannsynlighet relativt til utsagnet y. Dette er et aksiom som bare sier noe om hva som er med i domenet til sannsynlighetsfunksjonen C gitt at noe annet er med. Det kan formaliseres slik:

F4 $<x,\kappa(y)>\hat{e}Dom(C) \rightarrow <x,y>\hat{e}Dom(C)$

Det er vanskelig å innse hvordan man kan gi noe moteksempel eller på annen måte motbevise denne påstanden.

Den siste grunnsetningen i denne gruppen sier at dersom konjunksjonen av utsagnet x og konjunksjonen av alle de utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt y kan tilskrives en hvis sannsynlighet relativt til y så kan også x tilskrives en sannsynlighet relativt til y. Denne setningen kan formuleres mer formelt slik:

F5 $<x\Omega\kappa(y),y> \hat{e}Dom(C) \rightarrow <x,y>\hat{e}Dom(C)$

Også denne grunnsetningen synes å være av en ganske harmløs karakter. Den trengs i forbindelse med bevisene for de satser vi skal vise i den neste hoveddelen, dvs. Del II, av dette arbeid.

Før vi går videre og angir den siste gruppen av aksiomer i vår teori, som har med det multiplikative aksiom å gjøre, skal vi gi bevis for en sats som kan kaste noe lys over aksiomene F1 - F5. I den teorien som vi så langt har beskrevet og som har som ikke-logiske aksiomer, i tillegg til de rent mengdeteoretiske aksiomene, de vi så langt har nevnt, nemlig W1, W2, E1- E3, D1- D8 og F1 - F5 kan man utlede den følgende sats:

Teorem 3.1 Man har:

(a) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \rightarrow <\kappa(y),y> \hat{e}\ Dom(C)$

(b) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \rightarrow C(\kappa(y),y)=1$

(c) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow <x\Omega\ \kappa(y),\ \kappa(y)> \hat{e}\ Dom(C)$

(d) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow <x,\kappa(y)>\hat{e}\ Dom(C)$

(e) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow <x\Omega\kappa(y),y>\hat{e}\ Dom(C)$

Bevis: Ad (a): Anta (1) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C)$. Da har vi ved hjelp av F1 at (2) $(Ez)Ba(z,y)$. Ved hjelp av definisjonen av Ba og definisjonen av κ kan man slutte at (3) $Ba(\kappa(y),y)$. Fra (1), (3) og F2 følger $C(\kappa(y),y)=1$. Men fra dette følger åpenbart at $<\kappa(y),y> \hat{e}\ Dom(C)$. Dette viser at ikke bare punkt (a) holder, men også punkt (b).

Ad (d): Kondisjonalen mot venstre følger fra F4. Anta $<x,y> \hat{e}\ Dom(C)$. Da har vi ved hjelp av F3 at $C(x,y)= C(x,\kappa(y))$. Fra dette følger $(Er)(r = C(x,\kappa(y)))$ og herav har vi i sin tur ved hjelp av definisjonene av C og Dom(C) at $<x,\kappa(y)> \hat{e}\ Dom(C)$.

Ad (e): Kondisjonalen mot venstre følger fra F5. Anta (1) $<x,y> \hat{e}\ Dom(C)$. Da har

© Morten Harboe Rognes 2019

vi ved hjelp av punkt (a), som vi har bevist ovenfor, at (2) <κ(y),y>êDom(C). Fra (1) og (2) og aksiomene D3 og D4 følger så <x Ω κ(y),y> ê Dom(C).

Ad (c): Her er det nødvendig å bevise kondisjonalene begge veier. Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre: Anta (1) <x ,y>ê Dom(C). Da har man at (2) C(x,y)=r for noe r. Fra (1), aksiom F3 og (2) følger (3) C(x,y) = C(x,κ(y)) =r. Fra (1) og punkt (d) som vi har bevist ovenfor, følger (4) <x,κ(y)>ê Dom(C). Fra dette og D7 kan man slutte:

(5) C(x,κ(y)) = C(xΩκ(y),κ(y)). Herav har man så ved hjelp av (3) at C(xΩκ(y),κ(y)) = r og derfor <xΩ κ(y), κ(y)> ê Dom(C).

Vi viser så kondisjonalen mot venstre: Anta (1) <xΩ κ(y), κ(y)> ê Dom(C).Ved hjelp av F4 har vi da <xΩ κ(y), y> ê Dom(C). Fra dette og F5 følger så <x,y> ê Dom(C).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi kommer nå til den siste gruppen av aksiomer i vår teori, nemlig de multiplikative aksiomene. Det dreier seg om de følgende påstander:

M1	<z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → <z,xΩy> ê Dom(C)
M2	<x,y>ê Dom(C) & C(x,y)> 0 → (<z,xΩy>êDom(C) → <zΩx,y>ê Dom(C)
M3	<z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → C(zΩx,y) = C(z,xΩy)*C(x,y)

Det siste av disse tre aksiomene, grunnsetningen M3, kaller vi for det *multiplikative* aksiomet. Selve gruppen som består av disse tre aksiomene skal vi kalle for *de multiplikative aksiomene*.

Vi skal kalle et utsagn y0 for multiplikativt hvis og bare hvis det (a) utgjør en sannsynlighetsbasis - det er med andre ord slik at (Ez)(<z,y0> ê Dom(C) - og (b) y0 oppfyller kravene M1 - M3 om "y0" innsettes overalt for variabeltegnet "y".

Vi skal tillate oss å bruke uttrykket "Mult(y)" som en forkortelse for "y er et multiplikativt utsagn". Fra disse definisjonene følger at dersom ethvert utsagn som utgjør en sannsynlighetsbasis er multiplikativt så holder M1 - M3 for alle y. Omvendt kan man slutte at dersom M1 - M3 holder allment så er ethvert utsagn som utgjør en sannsynlighetsbasis et multiplikativt utsagn.

Dette kan formuleres som et eget teorem:

Teorem 3.2 Man har at (Ay)((Ez)(<z,y>êDom(C)) → Mult(y)) er ekvivalent med konjunksjonen av grunnsetningene M1 -M3.

Vi kan nå gi en presis definisjon av formell art av den teorien vi har beskrevet ovenfor. Vi har utvidet språket for mengdelære, L;e, med de tre predikatene "x er mulig verden", "w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ", samt det ternære sannsynlighetspredikatet " z er sannsynligheten til det forhold som utsagnet x beskriver gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens". Kaller vi mengden av predikater som inneholder disse tre predikatene og bare dem for Δ, er språket til vår teori L;e(Δ). I dette språket har vi spesifisert og presist formulert aksiomene for mulige verdener W1 og W2, aksiomene for enkelhetsrelasjonen E1 - E3, de grunnleggende aksiomene for sannsynlighetspredikatet D1 - D8, aksiomene som forbinder enkelhetsrelasjonen og sannsynlighetspredikatet F1 - F5 og endelig de multiplikative aksiomene M1 - M3. Vi betegner mengden av alle de formlene i L;e(Δ) som inneholder W1,W2, E1-E3, D1-D8, F1 -

© Morten Harboe Rognes 2019

F5 og bare dem med θ;1. Utvider vi θ;1 med de multiplikative aksiomene betegner vi den mer omfangsrike mengden med θ;2. Man har altså at θ;2 = θ;1 U {M1, M2, M3}. Den teorien vi får når vi utvider ZFC;u(L;e(Δ)) med θ1, ie. ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1] kaller vi for den *svake teorien om akseptanse og sannsynlighet*. Den teorien man får når ZFC;u(L;e(Δ)) utvides med θ;2 ie ZFC;u(L;e(Δ))[θ;2] kaller vi for den *fulle, eller sterke, teorien om akseptanse og sannsynlighet*.

§4 Formell definisjon av begrepet relativ sannsynlighetsstruktur

Vi er nå istand til å gi en definisjon av den klassen av abstrakte mengdeteoretiske strukturer, nemlig det vi skal kalle for *relative sannsynlighetsstrukturer*, som vi nevnte i innledningen til dette essay. I begynnelsen av den neste hoveddelen skal vi definere en annen klasse av strukturer, nemlig klassen av *preferansestrukturer med assosierte sannsynlighetsrom.* Hoveddelen av denne andre delen vil da bestå i å vise hvordan disse to strukturklassene er relatert til hverandre.

Definisjon 4.1 Med en relativ sannsynlighetsstruktur fortår vi et triple <I,R,C> som oppfyller de følgende krav:

(i) I er en ikke-tom mengde
(ii) R er en preordning over I
(iii) C er en funksjon der vi har at Dom(C) Inkl Pt(I)xPt(I) og Rgn(C) Inkl [0,1] og hvor vi har at C oppfyller kravene D3 - D8 og F1 -F5 som vi har omtalt ovenfor.

I tilknytning til denne definisjonen må det understrekes at vi vil bruke den notasjonen vi har definert tidligere: Er <I,R,C> en relativ sannsynlighetsstruktur betegner uttrykket "κ(x)" de R-maksimale elementene i mengden x, med andre ord Max(R,x) og det forutsettes da at xêPt(I), med andre ord at x er en eller annen delmengde av domenet i strukturen I. Videre er Ba(x,y) der x,yêPt(I) definert som tidligere: Ba(x,y) ↔ (x,yêPt(I) & ø ≠ Max(R,y) Inkl x). Omtales derfor en bestemt relativ sannsynlighetsstruktur <I,R,C>, og bruker vi uttrykkene "κ(x)" og "Ba(x,y)" i forbindelse med denne, er preordningsrelasjonen R underforstått. Man må altså av sammenhengen finne ut nøyaktig hva disse uttrykkene refererer til. Imidlertid skulle dette neppe by på vanskeligheter i praksis. Videre nevner vi at U, mengden av utsagn i en slik struktur, er Pt(I).

Vår neste definisjon er denne:

Definisjon 4.2 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at yêU = Pt(I). Da kaller vi utsagnet y for multiplikativt hvis og bare hvis <z,y>êDom(C) for noe z og utsagnet y oppfyller kravene M1- M3 for alle z,x.

Denne definisjonen er, som man ser, helt analog med den definisjonen vi tidligere ga av et multiplikativt utsagn.

§5 Kommentarer til teorien

© Morten Harboe Rognes 2019

Vi har ovenfor definert helt presist en bestemt teori. Som det fremgår av denne definisjonen dreier det seg om en første-ordens teori som inkluderer systemet ZFC;u, det vil i praksis si hele mengdelæren, og som videre inneholder grunnsetninger om mengden av mulige verdener, enkelhetsrelasjonen og sannsynlighetsfunksjonen C. Man bør bemerke at denne teorien, selvom den er presentert i en helt formalisert form, ikke er noe såkalt uintepretert formalt system. De lukkede formlene i teorien uttrykker genuine påstander som enten er sanne eller usanne. Grunnsetningene i teorien må tas bokstavelig. Teorien impliserer for eksempel at det faktisk finnes logisk mulige verdener, videre at mengden av disse mulige verdenene eksisterer og at den er minst tellbart uendelig. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres om de andre grunnsetningene i teorien.

Det er to momenter som bør nevnes før vi går videre. For det første er teorien formulert helt eksplisitt på samme måte som en hvilken som helst matematisk teori. Dette gjør den selvfølgelig ikke til matematikk, men det gjør det enkelt for den som vil kritisere teorien. På den ene side kan man for eksempel rette kritikken mot selve grunnbegrepene i teorien, predikatene "w er en logisk mulig verden", " w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ", og så videre, og fremsette argumenter for at disse predikatene er for vage og ubestemte og derfor uegnet som grunnlag for noe som kan regnes som en vitenskapelig preget teori. Eller man kan sogar forsøke å fremsette argumenter for at de er kognitivt meningsløse, hvis noen tvingende argumenter av denne art overhodet finnes. På den annen side kan man, om man aksepterer at de grunnleggende predikatene gir mening, rette kritikken mot de grunnsetningene som er formulert ved hjelp av dem, for eksempel ved å forsøke å vise at de har uintuitive konsekvenser, eller ved å argumentere for at de rett og slett er gale, feilaktige eller usanne.

Det andre moment som bør nevnes, og som åpenbart er riktig, er at teorien i visse henseende er ganske svak og meget generell. Fra dette i seg selv kan man imidlertid ikke slutte at teorien på noen måte er usann eller feilaktig.

Vi skal i de følgende avsnitt, §5.1 - §5.6, drøfte forskjellige sider ved den teorien vi har presentert. Den delen av teorien som først vil bli kommentert er den delen som har med mulige verdener å gjøre. Dette skjer i neste paragraf. Dernest følger et avsnitt om evidens, teorimangfoldet og hvilke teorier det er fornuftig å akseptere. I §5.3 kommenterer vi vår akseptanseteori og utdyper det vi ovenfor har kalt enkelhetsprinsippet og drøfter muligheten av å gi en dypere analyse av enkelhetsrelasjonen. I §5.4 gir vi en lang rekke med eksempler på påstander som det er fornuftig å akseptere relativt til all den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt. Det gjøres for å konkretisere teorien. Dernest, i §5.5, definerer vi hva vi mener med induktive slutninger og diskuterer i hvilken grad den akseptanseteoretiske delen av vår teori belyser induksjonsproblemet. I den siste paragrafen, §5.6 gir vi en mer utførlig vurdering av de aksiomene i teorien som har med sannsynlighet å gjøre, spesielt de aksiomene som forbinder akseptanserelasjonen Ba med sannsynlighetsfunksjonen C.

§5.1 Mulige verdener og det utsagnsteoretiske grunnlag

I teorien om akseptanse og sannsynlighet er naturligvis, som man har sett, predikatet "er en logisk mulig verden" et primitivt predikat. Det innebærer at predikatet ikke er definert ved hjelp av noen av de andre predikatene som inngår i det ikke-logiske vokabularet til teorien.

© Morten Harboe Rognes 2019

Når det gjelder dette predikatet tok vi bare med to grunnsetninger som bare inneholder dette og rent mengdeteoretiske predikater, nemlig W1, som uttrykker at det finnes en mengde som kun inneholder mulige verdener og som dessuten inneholder alle, og grunnsetningen W2 som sier at mengden av mulige verdener er minst tellbart uendelig.

Ved hjelp av begrepet mulig verden definerte vi predikatene "x er et utsagn" og "w er en verden hvor utsagnet x er sant". Et utsagn ble identifisert med en mengde av mulige verdener, det vil si vi identifiserte mengden av utsagn med mengden av alle delmengder av mengden av mulige verdener. Sannhetsrelasjonen "w er en verden hvor utsagnet x er sant", vi skal bruke uttrykket "w ⊨x" som forkortelse for dette lengere uttrykket, ble definert slik:

$$w \models x \leftrightarrow (w \hat{e} I \ \& \ w \hat{e} x \ \& \ x \hat{e} Pt(I))$$

Det bør nevnes at denne fremgangsmåten ble innført her utelukkende av bekvemmelighetsgrunner. I stedet for å velge denne metoden kunne vi ha innført, i tillegg til predikatet "w er en mulig verden", de to predikatene "x er utsagn" og "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant" som primitive predikater. La oss bruke uttrykket "Ut(x)" som forkortelse for det første av disse to predikatene. For det siste har vi allerede nevnt at vi bruker "w ⊨x" som forkortelse. Hvis man går frem på denne måten blir det et spørsmål om hva slags grunnsetninger man skal legge til fordi to sistnevnte predikatene. Man kunne naturligvis bruke de definisjonene vi tidligere har gitt som definerende aksiomer, men poenget er at det ikke uten videre er gitt, eller er på noen måte evident, at utsagn nødvendigvis er mengder av mulige verdener.

Det er i denne forbindelse nærliggende å ta i betraktning de følgende aksiomer som vi har presentert i tidligere arbeider:

U1 $w \models x \rightarrow MV(w) \ \& \ Ut(x)$

U2 $Ut(x) \ \& \ Ut(y) \rightarrow .\ x=y \leftrightarrow (Aw)(MV(w) \rightarrow (w \models x \leftrightarrow w \models y))$

U3 $M(x) \ \& \ x \ Inkl \ I \rightarrow (Ey)(Ut(y) \ \& \ x = Mg(w: w \models y)$

Det første av disse aksiomene er trivielt og sier at dersom w er en mulig verden der utsagnet x er sant så er w en mulig verden og x et utsagn. Den andre grunnsetningen, U2, sier at to utsagn er identiske hvis og bare hvis de er sanne i nøyaktig de samme verdenene. Kaller vi mengden av alle de verdenene der utsagn y er sant for sannhetsmengden til y sier det siste aksiomet dersom x er en mengde med mulige verdener finnes det alltid et utsagn som har x som sin sannhetsmengde. Vi skal kalle predikatet "w ⊨ x" for sannhetspredikatet. Predikatet "Ut(x)" kalles for utsagnspredikatet. Utvider vi nå språket med utsagns- og sannhetspredikatet og legger til setningene U1 - U3 som nye ikke-logiske aksiomer i tillegg til W1 og W2 får vi en teori med et mer omfattende ikke-logisk vokabular. Denne teorien har følgende trekk:

For det første kan man ikke i denne teorien vise at utsagn er identiske med mengder av mulige verdener. For det andre kan man vise, dersom man definer funksjonen μ ved å sette:

$$\mu = Mg(\langle x, Mg(w: w \models x)\rangle : Ut(x))$$

at μ avbilder mengden av utsagn $U = Mg(x:Ut(x))$ en-entydig og på mengden av alle mengder av mulige verdener, med andre ord kan man vise:

$$\mu : U \ \text{-(1-1,på)}\rightarrow Pt(I)$$

Hvis man enn mer definerer definerer konjunksjon og negasjon som operationer på utsagn ved:

$$K = Mg(\langle\langle x,y\rangle,z\rangle: x,y \hat{e} U \ \& \ z = \mu;\text{-}1(\mu(x) \Omega \mu(y)))$$

$$Neg = Mg(\langle x,y\rangle: x,y \hat{e} U \ \& \ y = \mu;\text{-}1(I - \mu(x)))$$

og ytterligere setter:

© Morten Harboe Rognes 2019

$c;I = Mg(\langle x,y\rangle: x \hat{e} Pt(I) \,\&\, y=(I - x))$
$\Omega;I = Mg(\langle\langle x,y\rangle,z\rangle: x,y \hat{e} Pt(I) \,\&\, z=x\Omega y)$

kan man vise at μ ikke bare en-entydig avbilder U på Pt(I), men at denne funksjonen er en isomorfi mellom strukturene <U, K, Neg> og <Pt(I), Ω;I, c;I>.

Det er naturligvis dette faktum som er rasjonalen bak identifikasjonen av utsagn med mengder av mulige verdener som vi av tekniske grunner har funnet det hensiktsmessig å arbeide med her.

Som man ser kan grunnsetningen U2 oppfattes som et identitetskriterium for utsagn: To utsagn er identiske om de er sanne i nøyaktig de samme mulige verdenene. Dette er naturlig nok et kriterium som er av begrenset verdi om man i praksis ønsker å avgjøre om et utsagn er identisk med et annet, men det kan av og til gi en ett hint om at to utsagn er forskjellige ved at man kan spesifisere en situasjon der det ene utsagn er sant, mens det andre utsagnet er usant.

Det er i denne sammenheng naturlig å nevne at man på grunnlag av grunnsetningene W1,W2 og U1 - U3 kan utlede et lignende identitetskriterium for mulige verdener, nemlig:

$$(+) \qquad MV(w) \,\&\, MV(w') \rightarrow .\ w=w' \leftrightarrow (Ax)(Ut(x) \rightarrow (w \models x \leftrightarrow w' \models x))$$

Hva (+) sier er at to mulige verdener er identiske hvis og bare hvis det gjelder for et hvert utsagn at det er sant i den ene verdenen hvis og bare hvis det er sant i den andre.

I forbindelse med det faktum at (+) og U2 representerer en slags identitetskritier for henholdsvis mulige verdener og utsagn kan man også nevne et mer generelt "identitetskriterium" som følger fra de rent mengdeteoretiske aksiomene i vår teori. Dette gjelder som et identitetskriterium for alle entiteter x og y hva enten de er mengder eller ikke- mengder. Kriteriet er det følgende:

$$(++) \qquad x=y \leftrightarrow (Az)(M(z) \rightarrow (x \hat{e} z \leftrightarrow y \hat{e} z))$$

Som man ser uttrykker (++) at to entiteter x og y er identiske hvis og bare hvis de er med i nøyaktig de samme mengder, med andre ord hvis og bare hvis det er slik for enhver mengde z at x er med i z hvis og bare hvis y er med i z. Fra dette følger naturligvis at to mulige verdener er identiske om de er med i nøyaktig de samme mengder og at to utsagn er identiske om det samme kan sies om dem, det vil si at de oppfyller det krav som står til høyre i (++).

Er de formlene som vi har nevnt ovenfor under merkelappen "identitetskriterier" hva man kunne kalle *tilfredstillende* identitetskriterier?

Hvis man med et tilfredstillende identitetskriterium for de entiteter som oppfyller et predikat F mener en sann setning av typen:

$$F(x) \,\&\, F(y) \rightarrow .\ x= y \leftrightarrow R(x,y)$$

der setningen selv ikke er noen predikatlogisk eller identitetsteoretisk sannhet, og hvor den åpne setningen "R(x,y)" utelukkende er bygd opp ved hjelp av meningsfulle, eller vitenskapelig meningsfulle, predikater, virker dette rimelig. For det første er det ikke urimelig å anse predikatene "x er en mulig verden", "x er et utsagn" og relasjonsuttrykket "x er en verden hvor utsagnet y er sant" for vitenskapelig meningsfulle. Er man så av denne oppfatning virker også de grunnsetningene vi har nevnt i forbindelse med disse predikatene

© Morten Harboe Rognes 2019

uimotsigelige og nødvendig sanne. Det følger i sin tur at setningene U2, (+) og (++) er nødvendig sanne. Siden de oppfyller kriteriene til et tilfredstillende identitetskriterium som definert ovenfor må de derfor anses som sådanne om denne definisjonen kan tilskrives en viss plausibilitet. Vi skal imidlertid ikke gå dypere inn på individuasjonsprinsippene for mulige verdener og utsagn enn det vi nå har gjort.[6]

La oss avslutte denne paragrafen med å bemerke at man ved hjelp av predikatene "x er en mulig verden", "x er et utsagn" og relasjonsuttrykket "x er en verden hvor utsagnet y er sant", (eller om man begrenser seg til "x er en mulig verden" og definerer de andre ved hjelp av dette) kan definere en lang rekke begreper som det er naturlig å studere i forbindelse med utsagn og utsagnsmengder. Ved hjelp av disse grunnbegrepene kan man for eksempel

6 At de kriteriene vi har oppført er tilfredstillende bestrides, som alle vet, av Quine. I Quine [1], "Theories and Things", side 101 til 104 forklarer Quine detaljert hvorfor f.eks. (++) av ham oppfattes som et intenst irriterende svar på individuasjonsproblemet for mulige verdener. (Quine drøfter attributter, men alt han sier gjelder også ubetinget for mulige verdener og utsagn.) Grunnen er at dersom mulige verdener skal kunne sammenfattes i mengder må de allerede være tilfredstillende individuert på forhånd. Dette kan ikke direkte anvendes på (+) om man anser at utsagn er tilfredstillende individuert. Men sier man at utsagn er tilfredstillende individuert ved å henvise til U2 går man tilsynelatende, om ikke åpenbart, i sirkel. Nåvel. Mengder og attributter oppfattes av Quine som "epifrastiske". Dette innebærer at dersom man for eksempel vil spesifisere en mengde, la oss si mengden av Oslo-borgere, kan man ikke gjøre dette på annen måte enn ved at man innfører predikatet "x er en Oslo-borger" og danner uttrykket "mengden av de x som er slik at x er en Oslo-borger". To mengder er naturligvis identiske om de har de samme medlemmer. Mengden av Oslo-borgere er derfor identisk med mengden av borgere i Norges hovedstad hvis og bare hvis alle borgere i Norges hovedstad er Oslo-borgere og omvendt. Med andre ord har man:

(1) $Mg(x:F(x)) = Mg(x:G(x)) \leftrightarrow (Ax)(F(x) \leftrightarrow G(x))$

Kriteriet for når to mengdeabstrakter betegner den samme mengden er nettopp (1) og derfor krystallklart. Bruker man nå "λx(F(x))" som forkortelse for "Egenskapen å være en x slik at F(x)" og "Nec(α)" som forkortelse for "Det er logisk nødvendig at α" kan man formulere et identitetskriterium for de egenskaper som betegnes av egenskapsabstrakter på følgende vis i analogi med (1):

(2) $\lambda x(F(x)) = \lambda x(G(x)) \leftrightarrow Nec((Ax)(F(x) \leftrightarrow G(x)))$

Tilsvarende for utsagnsabstraksjon, i det vi benytter "u(p)" som forkortelse for "utsagnet som uttrykker at p":

(3) $u(p) = u(q) \leftrightarrow Nec(p \leftrightarrow q)$

Hvis man aksepterer modaloperatoren Nec som et vitenskapelig meningsfullt begrep har man her i det minste et identitetskriterium for de utsagn som kan uttrykkes ved setninger og de egenskaper som kan betegnes ved egenskapsabstrakter. Dette er naturligvis ikke akseptabelt for Quine som må karakteriseres som intens kritiker av alt som heter modallogikk. (Se Quine[2] side 20-46, s 139-159 og Quine [3] f.eks s 206 - 222) Det foreligger ikke fra Quines side noe direkte forsøk på å gjendrive teorien bestående av W1,W2 og U1 - U3. Det er også vanskelig å skjønne hvordan man skal kunne gjendrive denne teorien fordi de nevnte grunnsetningene virker nærmest selvinnlysende om man antar at predikatene "mulig verden" og "utsagn" gir mening og man tilskriver dem den betydning som det er intuitivt rimelig å gjøre. Den eneste mulighet synes derfor å være at man forsøker å vise at de primitive predikatene ikke gir noen vitenskapelig mening. Hvis dette skal gjøres ad argumentativ vei synes det å forutsette at man i det minste angir et kriterium (f.eks. en nødvendig betingelse) for at et predikat klart skal være i besittelse av vitenskapelig mening og hvor kriteriet selv er mer opplagt enn at de nevnte predikater er vitenskapelig meningsfulle. Ikke i noen arbeider av Quine finner man noe slikt kriterium eksplisitt formulert. Man kan derfor bare ty til den høyest usikre metode som består i "å lese mellom linjene". Det nærmeste man tilsynelatende kan komme i denne forbindelse synes å være følgende prinsipp som vi ikke direkte kan tilskrive Quine, langt mindre dytte på ham: *Et predikat gir klar vitenskapelig mening bare hvis det kan defineres på tilfredstillende måte ved hjelp av logiske, mengdeteoretiske og matematiske termer, samt termer og predikater som er gangbare i naturvitenskapelige teorier av fysisk og kjemisk art*. I så fall virker det ganske innlysende at de predikater vi har nevnt, "utsagn", "mulig verden", "egenskap" etc. ikke oppfyller de krav som stilles i kriteriet, og hvis kriteriet er korrekt må avvises som uten klar vitenskapelig mening. Men kriteriet selv synes å være alt annet enn evident og synes å implisere en form for (dogmatisk) naturalistisk panfysikalisme, et standpunkt som er like usmakelig for oss som Aristotelsk essensialisme er for Quine. I det minste kan kriteriet ikke begrunnes

© Morten Harboe Rognes 2019

definere hva som menes med en konsistent utsagnsmengde, en maksimalt konsistent utsagnsmengde og en fullstendig utsagnsmengde. Videre kan man definere hva som menes med at et utsagn impliserer et annet og hva som menes med at en mengde med utsagn impliserer et utsagn. Man kan videre definere ekvivalens mellom utsagnsmengder og utsagn. Ytterligere kan man definere hva som menes med konsekvenssystemet til en mengde, hva som menes med en uavhengig og strengt uavhengig utsagnsmengde og en rekke andre begreper. Ikke bare kan man definere disse begrepene ved hjelp av grunnbegrepene vi har nevnt. Innenfor den teorien vi har satt opp kan man også utlede en lang rekke satser som viser hvordan disse begrepene er relatert innbyrdes. Man kan med andre ord utvikle en generell teori om utsagnsmengder, det vil en teori som har sin naturlige plass innenfor vitenskapslogikken og dermed vitenskapsteorien.

§5.2 Om evidens, teorimangfoldet og hvilke teorier det er fornuftig å akseptere

Vi har i §3 innført predikatet "x er utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt". Den siste delen av dette uttrykket "alt som kan tas for gitt" kan reformuleres som "all tilgjengelig evidens". Som nevnt tidligere bruker vi "Ba(x,y)" som forkortelse for dette predikatet. La oss på dette punkt nevne at man også kan innføre et litt annet predikat, nemlig "x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnsmengden Δ representerer all tilgjengelig evidens". Vi skal forkorte dette predikatet med "Ba;m(x,Δ)" og vi kan definere det ved hjelp av predikatet "Ba(x,y)" på følgende måte:

$$Ba;m(x,\Delta) \leftrightarrow Ba(x, SNu(\Delta)).$$

Vi minner om at SNu(Δ) er konjunksjonen av alle utsagnene i Δ om Δ er en mengde med utsagn, og at SNu(Δ) er et utsagn om Δ er en utsagnsmengde. Siden vi i dette skrift offisielt identifiserer utsagn med mengder av mulige verdener følger det at SNu(Δ) = SN(Δ).

Med en "evidensmengde" forstår vi en mengde med utsagn som fremsettes til støtte for, eller som begrunnelse for, et eller flere utsagn.

La oss nå spesifisere forskjellige utsagnsmengder som rimeligvis kan fremsettes som støtte for påstander av vitenskapelig natur. Anta p er en bestemt person. Man kan da betrakte snittet av alle de utsagn som logisk sett følger fra alt det personen p vet ved tidspunktet t. Dette vil være et utsagn. Siden alt det en person ser, merker, kjenner ved tidspunktet t vil være en del av det p vet ved tidspunktet t følger det at ethvert utsagn som for eksempel følger fra alt det p ser ved tidspunktet t vil være et utsagn som som også følger fra alt det x vet ved tidspunktet t. Vi skal kalle det utsagnet som er snittet av alle de utsagn som logisk sett følger fra alt det personen vet ved tidspunktet t for *den totale evidens p er i besittelse av ved tidspunktet t*.

Det er visse forhold som bør bemerkes når det gjelder det utsagnet som representerer den totale evidens som en person besitter ved et gitt tidspunkt.

For det første må det påpekes at dette utsagnet er sant og derfor konsistent. For det andre er det viktig å notere at den totale evidens som personen p besitter varierer med tiden, men ikke nødvendigvis på noen kumulativ måte. Alt det personen p ved ved tidspunktet t behøver ikke nødvendigvis være inkludert i det vedkommende vet ved tidspunktet t' der t' er

utfra naturvitenskapelige teorier supplert med logiske, mengdeteoretiske og matematiske prinsipper. Dessuten virker det som om predikatet "vitenskapelig meningsfullt predikat" ikke selv oppfyller betingelsen i kriteriet slik at det slår grunnen under seg selv. Dette er ytteligere en grunn til at vi finner det uberettiget å "dytte" det på Quine.

© Morten Harboe Rognes 2019

et tidspunkt som kommer etter t. Noe av det p vet ved tidspunktet t kan han ha glemt ved det senere tidspunktet t', og noe av det p vet ved tidspunktet t' kan være noe helt nytt og noe han absolutt ikke visste ved t. Forøvrig kan det være en varierende grader av overlapping. For det tredje må det nevnes at om man tar snittet av den totale evidens en person har ved tidspunktet t og den totale evidens vedkommende har ved t' (eller konjunksjonen av disse to utsagn) så er også dette et sant og konsistent utsagn. Det samme gjelder om man tar konjunksjonen av den totale evidens til personen p ved tidspunktet t og den totale evidens til personen p' ved tidspunktet t' der p og p' er forskjellige personer og t og t' er forskjellige tidspunkter. Dette gjelder generelt og uavhengig av tidsavstanden mellom tidspunktene t og t'.

Vi skal i det følgende bruke uttrykket "e;(p,t,w)" som forkortelse for det lengere uttrykket "den totale evidens som personen p er i besittelse av ved tidspunktet t i verdenen w". Uttrykket "e(p,t)" bruker vi for å betegne den totale evidens som personen p har ved tidspunktet t i den aktuelle verden, dvs. den totale evidens som p *faktisk* har ved tidspunktet t. Med andre ord har vi at e(p,t) = e(p,t,a0) hvor uttrykket "a0" betegner den aktuelle verden. (Det bør noteres at vi ikke har innført predikatet "x er den aktuelle verden" som et primitivt predikat i vår teori.)

La oss nå se på SNu/pêP/(e(p,t)), der "P" betegner mengden av personer.[7] Dette vil være konjunksjonen av de diverse e(p,t) ettersom p gjennomløper mengden av alle personer. Siden e(p,t) representerer snittet av alt det personen p vet ved tidspunktet t (i den aktuelle verden), vil konjunksjonen av de diverse e(p,t) ettersom p gjennomløper P representere konjunksjonen av alle de påstander som hele menneskeheten vet ved tidspunktet t. Populært og grovt uttrykt representerer SNu/pêP/(e(p,t)) menneskehetens totale kunnskap ved tidspunktet t. Hvis vi nå lar t0 være det nåværende tidspunkt og betrakter konjunksjonen av alle de diverse SNu/pêP/(e(p,t)) ettersom t gjennomløper mengden av alle de tidspunkter som kommer før eller er identisk med t0, med andre ord betrakter SNu/t=<t0/(SNu/pêP/(e(p,t)) vil dette være konjunksjonen av alle de påstander som hele menneskeheten vet fra de tidligste tider og frem til og inkludert det nuværende tidspunkt. Vi skal betegne dette utsagnet med Te(t0) og setter mer generelt:

Te(t) = SNu/t'=< t/(SNu/pêP/(e(p,t'))

Uttrykket "Te(t)" kan i lys av våre redegjørelser ovenfor leses "summen av all den evidens menneskeheten besitter frem til og inkludert tidspunktet t". La nå t1 være et tidspunkt i Platons liv. Da vil t1 < t0. Vi betegner Platon med "p0". e(p0,t1) vil da være all den evidens Platon er i besittelse av ved t1. Det skulle da være klart at Te(t0) impliserer e(p0,t1). Det samme gjelder om vi lar p0 være for eksempel Aristoteles (eller Evklid) og tenker oss at t1 er et tidspunkt i Aristoteles (eller Evklids) liv.

La oss bemerke endel ting i forbindelse med Te(t). For det første bør det påpekes at Te(t) er et utsagn og at det må være et sant utsagn. Dette impliserer naturligvis at Te(t) er et konsistent utsagn. For det andre kan det nevnes at sekvensen <Te(t)>/têT/ er kumulativ i den

7 SNu/xêA/(f(x)) er definert slik: SNu/xêA/(f(x)) = Mg(w: wêI & (Ax)(xêA → wêf(x))). Med andre ord er SNu/xêA/(f(x)) konjunksjonen av de diverse utsagnene f(x) ettersom x gjennomløper mengden A. Vi gjør også oppmerksom på at uttrykket "SNu(Δ)" er definert slik: SNu(Δ)= Mg(w: wêI & (Ax)(xêΔ → wêx)). Fra den siste definisjonen kan man utlede at SNu(Δ) alltid er et utsagn, dvs. en mengde med mulige verdener. Dessuten fremgår det også fra definisjonen at SNu(Δ)=I om Δ er den tomme mengden, det vil si om Δ=ø. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres om SNu/xêA/(f(x)). Man ser fra de definisjonene vi har gitt at SNu/xêA/(f(x)) = SNu(Mg(f(x): xêA)). Leseren skulle ikke ha noen store problemer med å bevise dette.

© Morten Harboe Rognes 2019

forstand at dersom t,t' er tidspunkter der t <t' har vi at utsagnet Te(t') impliserer Te(t). Dette innebærer atmengden av alle de utsagn som er implisert av Te(t) er inkludert i mengden av alle de utsagn som er implisert av utsagnet Te(t'). Med andre ord er representerer sekvensen <Te(t)>/têT/ et stadig ekspanderende system av hovedsakelig empiriske sannheter. For det tredje kan det nevnes at Te(t0) er et utsagn som går langt utover det som følger fra den totale evidens som noen enkelt person p har ved tidspunktet t om t kommer før t0. Platon kunne ikke på noen måte forutsi noe om hva slags observasjoner man ville gjøre tusen år etter at han var død.

Nåvel. La oss nå gå over til det som ofte kalles tesen om teorimangfoldet. Denne tesen sier at uansett hvor mange data man har samlet inn, eller observasjoner man har gjort, før og inntil et visst tidspunkt vil det finnes uendelig mange konsistente teorier som er innbyrdes uforenelige, men som alle er forenelige med de data man har samlet inn og faktisk impliserer dem. Tar vi for eksempel utgangspunkt i utsagnet Te(t0), summen av all den evidens som menneskeheten er i besittelse av frem til og inkludert det nuværende tidspunkt t0, vil det derfor finnes uendelig mange innbyrdes uforenelige teorier som alle er forenelige med Te(t0). Siden de er innbyrdes uforenelige kan ingen av dem være implisert av utsagnet Te(t0) de må alle gå utover t0.

La oss på dette punkt avklare hva vi mener med en teori. Med en teori mener vi her intet annet enn en mengde med utsagn. Denne mengden kan være konsistent, dvs. det kan finnes en verden der alle utsagnene er sanne, eller inkonsistent. Videre kan en teori inneholde endelig eller uendelig mange utsagn. Videre kan den være lukket under logisk konsekvens eller ikke. La oss også notere at mengden av alle de utsagn som er sanne i en mulig verden w er en teori. Denne teorien er ikke bare konsistent, den er også fullstendig i den forstand at man ikke kan legge til utsagn som ikke er med i den uten at man som resultat får en inkonsistent teori. Fra tesen om teorimangfoldet anvendt på Te(t0) følger det at sannhetsmengden til Te(t0), ie mengden av alle de verdener der utsagnet Te(t0) er sant, inneholder minst tellbart uendelig mange verdener. Med andre ord har man:

(1) Card(Te(t0)) >= Aleph;0

Dette er naturligvis en singulær påstand. Den kan generaliseres noe. Vi bruker T for å betegne mengden av alle tidspunkter som vi for enkelhetens skyld tenker oss ordnet lineært og at er uendelig i begge retninger. Videre forutsetter vi også at T er tett og kontinuerlig, med andre ord at mengden av tidspunkter kan representeres ved punktene på den reelle tallinjen. I så fall kan man generalisere (1) til:

(2) (At)(têT → Card(Te(t)) >= Aleph;0)

med andre for et hvilket som helst tidspunkt t gjelder det at summen av all den evidens menneskeheten besitter frem til og inkludert tidspunktet t er et utsagn hvis sannhetsmengde er minst tellbart uendelig. Det bør bemerkes at (2) er ekvivalent med (3) den påstand at det finnes en minst tellbart uendelig mengde med ikke-maksimalt konsistente teorier som er forenelige med Te(t) og som impliserer dette utsagn og som videre er innbyrdes uforenelige og at dette gjelder for alle têT.

Ikke bare er alle disse teoriene konsistente med Te(t), de er også sterkere enn Te(t), dvs. impliserer strengt Te(t). Dette innebærer naturligvis at de "går utover" Te(t) og ikke kan

© Morten Harboe Rognes 2019

logisk utledes fra den evidens som Te(t) representerer. Utelukker man noen av disse teoriene kan det bare skje ved overveielser av en rent logisk, aprioristisk natur, kort sagt av aprioriske grunner. Fra det at disse teoriene ikke alle kan være sanne samtidig kan man i og for ikke slutte at noen av dem er mer "fornuftige" enn andre. Men dersom det finnes et enkleste totalsystem av kausallover hvis sannhetsmengde er forenelig med Te(t) virker det rimelig å si at alle utsagn som følger fra dette system, eventuelt fra dette system sammen med Te(t) er utsagn som det fornuftig å akseptere relativt til Te(t).

La oss nå se på noen andre eksempler av en noe annen natur. Vi tar utgangspunkt i Te(t0) der t0 er det nåværende tidspunkt. Vi minner om at Te(t0) er summen av all den evidens som menneskeheten besitter frem til og inkludert dette tidspunkt. Den følgende påstand, nemlig *"Ethvert egg blir hårdkokt etter ti minutter i kokende vann"*[8] skal vi betegne med H1. Det virker rimelig å hevde at denne påstanden er konsistent med Te(t0), med andre ord at den ikke strider mot noen data eller observasjoner som så langt har blitt gjort. Dessuten er det meningen at H1 skal oppfattes som en universell påstand, dvs. uansett hvor man befinner seg i universet og uansett ved hvilket tidspunkt man befinner seg, vil det være slik at et egg blir hårdkokt etter ti minutter i kokende vann.[9] Det virker nå rimelig å si at H1 ikke bare er konsistent med Te(t0), men også er, i likhet med en mengde lignende påstander, en påstand som det er *fornuftig å akseptere* om Te(t0) representerer all tilgjengelig evidens. Naturligvis er dette fordi alle i talløse tilfelle har iaktatt at egg som kokes i ti minutter eller litt mer blir hardkokte og at dette har vært tilfelle under varierende omstendigheter. Dette er en påstand som det er nærmest absurd å benekte om man bruker ordet "fornuftig" slik det vanligvis brukes.

I forbindelse med H1 kan det være av interesse å se på en annen påstand, nemlig den følgende: *"For alle tidspunkter som kommer før tidspunktet t blir et egg hårdkokt etter ti minutter i kokende vann, og for alle tidspunkter etter t eller identisk med tidspunktet t blir det først hårdkokt etter femten minutter i kokende vann"*. Strengt tatt er dette en åpen setning og uttrykker ikke en påstand før man har tilordnet variabeltegnet "t" en bestemt verdi. Vi skal forkorte denne åpne setningen med "H2(t)". Hvis man lar t1 betegne det tidspunkt som kommer hundre år etter det nuværende tidspunkt uttrykker naturligvis H2(t) en helt bestemt påstand.

Det virker plausibelt å hevde at utsagnet H2(t), der t er et tidspunkt som kommer la oss si ti år eller mer etter det nuværende tidspunkt, er en påstand som logisk sett er kompatibel med all den evidens vi har nå. Man motsier følgelig ikke seg selv om man hevder at begge utsagnene Te(t0) og H2(t) der t>t0 begge er sanne. Det bør også noteres at H1 og H2(t) ikke strengt tatt er logisk uforenelige: Anta t' er et tidspunkt som kommer etter t. Anta at et egg blir lagt i kokende vann ved t' og blir liggende der i ti minutter. Ifølge H1 vil egget da være hardkokt etter disse ti minuttene. Ifølge H2(t) vil det først være hårdkokt etter femten minutter og kan derfor ikke være hårdkokt etter ti minutter. Men fra dette følger ikke at H1 og H2(t) direkte motsier hverandre. Det følger bare at for ethvert tidspunkt t' som kommer etter t vil ikke noe egg befinne seg i kokende vann i ti minutter regnet fra t' (eller i lengere tid enn dette). Det man derimot kan si er at de to påstandene gir logisk uforenelige forutsigelser angående hva som vil skje under nærmere angitte betingelser.

Det samme gjelder H2(t1) og H2(t2) om vi forutsetter at t0 <t1 og t1 < t2. Er da t' et tidspunkt som ligger mellom t1 og t2 og legges et egg i kokende vann ved t' og blir liggende

8 Vi forutsetter at egget kokes ved havoverflaten og under omstendigheter som er vanlige på jorden.

9 Igjen må vi minne om forutsetningene som ble nevnt i forrige fotnote.

© Morten Harboe Rognes 2019

der i minst ti minutter, vil man ifølge H2(t1) ha at egget ikke er hårdkokt etter disse ti minuttene, mens det ifølge H2(t2) vil være hårdkokt. Også H2(t1) og H2(t2) gir under visse betingelser uforenelige forutsigelser, men er strengt tatt ikke logisk uforenelige.[10]

Vi fant ovenfor at det var rimelig å hevde at det er foruftig å akseptere H1 relativt til all den evidens vi besitter ved det nåværende tidspunkt, dvs. Te(t0). Gitt denne evidens og at dette er all den evidens som foreligger virker det imidlertid eiendommelig å hevde at det er foruftig å akseptere for eksempel H2(t1), der t1 er et tidspunkt som kommer hundre år etter t0, relativt til Te(t0). Tilsvarende om man betrakter H2(t) for et eller annet tidspunkt som ligger mellom t0 og t1, eller som kommer etter t1 i tid.

Hvordan innser man så at det er fornuftig å akseptere H1 relativt til Te(t0), eller en mindre omfattende evidensmengde e og at det ikke er fornuftig å akseptere H1(t) for noe tidspunkt t som kommer etter t0 det vil si det nåværende tidspunkt? Det første man kan påpeke er at dette ikke kan begrunnes på basis av den evidens vi faktisk har nå, f.eks Te(t0), i alle fall ikke på grunnlag den rent empiriske del av denne evidens. Man kan neppe utføre eksperimenter for å bringe på det rene om det er fornuftig å akseptere H1 relativt til Te(t0). Heller ikke er den påstand at H1 er fornuftig å akseptere relativt til den totale evidens vi har nå en empirisk hypotese fra hvilken man kan utlede predikasjoner som kan kontrolleres i fremtiden, og det virker åpenbart søkt å si at det er en påstand som kan styrkes eller svekkes av fremtidig evidens. Man synes derfor bare å stå tilbake med det følgende: En påstand av denne type kan bare innses ved at man nøye reflekterer over hva den evidens man har innebærer logisk sett, hva det utsagn man hevder at er fornuftig å akseptere logisk sett innebærer og hva man legger i ordet "fornuftig", spesielt hva man legger i uttrykket "Det er fornuftig å akseptere at α gitt at β representerer all tilgjengelig evidens". En person som derfor benekter at det for eksempel er fornuftig å akseptere den universelle sats at egg blir hårdkokt etter ti minutter i kokende vann på basis av all den evidens vi har nå kan ikke være annet enn en person som ikke skjønner hva fornuft er, som ikke skjønner betydningen til ordet "fornuftig", som ikke skjønner hvordan det er rimelig å bruke ordet "fornuftig", som kort sagt ikke har lært å tale og skrive det språket han bruker skikkelig, og hvis dette mot formodning ikke er tilfelle er en person som må karakteriseres som tankeløs og forvirret.[11]

10 Situasjonen her er analog med denne. Man har to teorier T1, T2 som hver er konsistente. Fra T1 kan man utlede p→q og fra T2 kan man utlede p→¬q. T1&T2 følger da ¬p. Men fra dette kan man ikke slutte at konjunksjonen T1& T2 er inkonsistent. Derimot er konjunksjonen av T1&T2 og p kontradiktorisk.

11 I lys av det vi har sagt om enkelhetsprinsippet bør det gjøres helt klart at et utsagn av typen Ba(x,y) impliserer at det finnes visse enkleste verdener i sannhetsmengden til y. Dette er ingen helt opplagt sak og gjør at aksiomet (eller definisjonen) (1) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x) får en noe annen karakter enn de svært enkle, og skulle man tro, fullstendig innlysende aksiomene E1 - E3. Hvis man derfor hevder at det generelle utsagnet H1 er fornuftig å akseptere relativt til all den evidens vi har nå følger det at det finnes noen enkleste verdener blandt alle de verdenene hvor all den evidens vi har nå er sann. Det kan i denne forbindelse være naturlig å nevne at ingen enkeltsetning av typen Ba(x,y) strengt tatt er noe teorem i den akseptanseteorien vi har formulert. En annen ting er dette: Man ser lett fra (1) at (Ez)(zêU &Ba(z,y)) er ekvivalent med ø≠Max(R,y). Hvis man derfor hevder at (Ex)(xêU & Ba(x,I)) er dette ekvivalent med at Max(R,I)≠ø. Dette er i sin tur ekvivalent med å hevde at det i mengden av alle mulige verdener finnes noen maksimalt enkleste verdener. Man kan ikke si annet enn at dette er en temmelig dristig metafysisk påstand

Det kan også bemerkes at den følgende påstand: (2) (Ay)(yêU → (Ez)(zêU & Ba(z,y)) er konsistent med den teorien vi har formulert, men at (2) , naturlig nok, ikke kan utledes fra grunnsetningene i var teori, ie E1- E3 supplert med (1) oppfattet som en definisjon av Ba. Det bør nevnes at (2) er en meget sterk påstand. Den impliserer at enkelhetsrelasjonen R er en preferanserelasjon og at alle enkelhetsnivåene assosiert med R, ie de diverse Mg([w];R: wêI) kan ordnes lineært. Men dette er ikke alt. Påstanden (2)

© Morten Harboe Rognes 2019

Vi har altså sett at det er fornuftig å akseptere H1 relativt til all den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt. Men hvorfor er det ikke fornuftig H2(t1) relativt til denne evidens? La oss betegne den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt med e. Forutsetter vi dette virker det rimelig å hevde at de enkleste verdenene der konjunksjonen av e og H1 holder, må være enklere enn de enkleste verdenene der konjunksjonen av e og H2(t1) holder. I så fall kan ikke H2(t1) være sann i alle de enkleste verdenene i sannhetsmengden til e, mao. kan det da ikke være fornuftig å akseptere H2(t1) gitt at e representerer all tilgjengelig evidens.

Den følgende sats som og dens bevis gir et mer presist uttrykk for tankegangen ovenfor. Det bør understrekes at dette er en sats som kan utledes i den teorien som er definert i §3. Vi har:

Teorem 5.2.1 Anta følgende holder i det vi forutsetter at e, H1 og H2 er utsagn
(i) Max(R, eΩH1) ≠ ø
(ii) (Aw)(Aw')(wê Max(R,eΩH1) & w'êMax(R,H2) → wR*w')
Da har man:
(a) ¬[ø≠ Max(R,e) & Max(R,e) Inkl H2]
(b) ¬Ba(H2,e)

Bevis: Punkt (b) i denne satsen følger umiddelbart fra punkt (a) og definisjonen av Ba. Vi beviser derfor bare (a). Anta for reduktio ad absurdum at (i) - (ii) holder, men at vi ikke desto mindre har:
(iii) ø≠ Max(R,e) & Max(R,e) Inkl H2
Fra (iii) følger eksistensen av noe w0 der vi har (1) w0êMax(R,e). Fra dette og den siste konjunkten i (iii) følger (2) w0ê (eΩH2). Vi kan nå vise:
(3) Max(R,e) = Max(R,eΩH2)
Vi skal gi et detaljert bevis for dette nedenfor. Fra (i) har vi at det finnes w1 der (4) w1êMax(R,eΩH1) Fra (1) og (3) følger (5) w0êMax(R,eΩH2). Fra dette og (4) følger i lys av forutsetning (ii) at vi må ha (6) w1R*w0. Fra (4) følger ved hjelp av definisjonen av operatoren Max at (7) w1ê(eΩH1) Inkl e. Da (7.1) w1ê e. Fra (1) og definisjonen av Max følger også (8) (Ay)(yê e → w0Ry). Dette og (7.1) impliserer (9) w0Rw1. Fra (6) og definisjonen av R* ser man at w1Rw0 & ¬w0Rw1. Dette strider åpenbart mot (9). Det følger at (a) holder.

Det gjenstår nå å vise at (3) ovenfor holder. Vi ser først på inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w' at (10) w'êMax(R,e). Da har vi w'êe og w'êH2 i lys av (iii). Det følger at (11) w'êeΩH2. Anta nå for vilkårlig y at yêeΩ H2. Da har vi yê e og derfor ved hjelp av (10) at w'Ry. Det følger at w'êMax(R, eΩH2). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (3) holder.

La oss nå ta for oss inklusjonen mot venstre i (3). Anta for reduktio at det finnes w' slik at (12) w'êMax(R,eΩH2) og (13) ¬(w'ê Max(R,e))

Fra (12) har vi ved hjelp av definisjonen av Max at (14) w'ê eΩH2 og derfor at (15) w'ê e. Fra (13) har man ved hjelp av definisjonen av Max:
(16) ¬(w'ê e & (Ay)(yê e → w'Ry)) Fra dette følger:

impliserer også at alle enkelhetsnivåene kan *velordnes,* med andre ord vil det finnes et høyeste enkelhetsnivå N0, et nest høyeste nivå N1, osv. Det omvendte holder også: Kan alle enkelhetsnivåene assosiert med R velordnes så holder også (2).

© Morten Harboe Rognes 2019

w'ê e → (Ey)(yê e & ¬(w'Ry))

Fra dette og (15) følger at det må finnes noe w2 der vi har

(17) w2ê e & ¬(w'Rw2)

Siden inklusjonen mot høyre i (3) holder, noe vi allerede har bevist, følger fra (1) og (3) at (18) w0êMax(R,eΩH2). Fra dette og (12) kan man slutte (19) w0 Ekv;R w'. Fra dette i sin tur følger ved hjelp av definisjonen av Ekv;R at (20) w0Rw' & w'Rw0. Hadde vi nå w0Rw2 ville vi da ha ved hjelp av (20) at w'Rw2. Men dette strider mot (17). Vi har derfor (21) ¬(w0Rw2). Men w2ê e & w0êMax(R,e). Dette og (21) gir oss en motsigelse. Det følger at (12) ikke kan holde for noe w' og derfor at inklusjonen mot venstre i (3) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§5.3 Om enkelhetsrelasjonen, enkelhetsprinsippet og akseptanserelasjonen.

I den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet er det bare tre predikater utover de mengdeteoretiske predikatene som er av ikke-logisk natur. Dette ser man fra den formelle fremstillingen av teorien som vi tidligere har gitt. De tre predikatene er "w er en logisk mulig verden", enkelhetspredikatet Enk og det sannsynlighetsteoretiske predikatet Cd. Man husker at uttrykket "Enk(w,w')" er en forkortelse for " w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w'".

Vi har nå kommentert aksiomene som inneholder predikatet "w er en mulig verden". Her vil vi imidlertid si noe mer om aksiomene og definisjonene vi har gitt i forbindelse med enkelhetsrelasjonen. Aksiomene E1 - E3 sier ikke noe annet enn at enkelhetsrelasjonen er en relasjon mellom mulige verdener og at den er en refleksiv og transitiv relasjon, med andre ord at den er en preordning over mengden av mulige verdener I. Hvis dette enkelhetspredikatet gir noen mening skulle disse tre aksiomene, som er meget svake, fremstå som fullstendig uimotsigelige. Vi har imidlertid gitt visse definisjoner i forbindelse med enkelhetspredikatet. Noen av disse fremtrer som helt harmløse. R, R*, Ekv;R er for eksempel definert ved hjelp av enkelhetspredikatet og rent mengdeteoretiske predikater. R er selvfølgelig enkelhetsrelasjonen selv, R* er den "strikte" eller strenge enkelhetsrelasjonen: man har at wR*w' hvis og bare hvis w er en mulig verden som har en større grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn verdenen w'. Ekv;R den relasjonen som består mellom to mulige verdener dersom de har nøyaktig den samme grad av indre koherens, harmoni og enkelhet. Endelig har vi Max-operatoren som til enhver mengde av mulige verdener tilordner a mengden av de elementene i a som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som ethvert annet element i a. Som man husker innførte vi av rene bekvemmelighetsgrunner uttrykket "κ(a)" som forkortelse for det litt lengere uttrykket "Max(R,a)". Dette er berettiget fordi vi gjennom hele denne første delen av vårt arbeid forutsetter at enkelhetsrelasjonen er den samme.

Vi innførte imidlertid et spesielt predikat i forbindelse med de tre aksiomene om enkelhetsrelasjonen, nemlig predikatet "x er et utsagn som beskriver et forhold som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all evidens som kan tas for gitt" som vi forkortet med "Ba(x,y)"[12]. Dette predikatet ble innført ved den følgende definisjon:

12 Dette lange uttrykket kan også leses "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" eller "det er fornuftig å akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y"

© Morten Harboe Rognes 2019

(+) $\quad Ba(x,y) \leftrightarrow (x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq Max(R,y) \ \& \ Max(R,y)$ Inkl x)

Hvis dette oppfattes som en konvensjonell stipulativ definisjon betyr naturligvis det uttrykket som står til venstre i bikondisjonalen ikke noe annet enn det som står til høyre. I så fall må man forklare hvorfor det er hensiktsmessig og formålstjenelig å tillegge uttrykket "Ba(x,y)" akkurat denne betydningen.

På den annen side kan man hevde at uttrykket vi forkorter med "Ba(x,y)" allerede på forhånd har en mening og i så tilfelle har ikke (+) karakter av å være en stipulativ definisjon, men uttrykker snarere en påstand som må bevises og begrunnes selvom den kan virke plausibel for velvillig innstilte personer.

Det er i prinsippet tre mulige alternativer på dette punkt når det gjelder aksiomatiseringen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Det første alternativet er den teorien vi allerede har beskrevet: Enkelhetspredikatet er det eneste ikke-logiske predikatet sammen med predikatet "mulig verden", det vi kalte sannsynlighetspredikatet og de mengdeteoretiske predikatene. Aksiomer når det gjelder enkelhetspredikatet er E1 -E3. "Ba(x,y)" er ikke noe primitivt predikat, men innført ved definisjonen (+).

Det andre alternativet er at an utvider språket til den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet med predikatet "Ba(x,y)" som et nytt ikke-logisk predikat og utvider denne teorien med (+) som et nytt ikke-logisk aksiom i tillegg til E1 - E3. Dette er det alternativet som vi antydet ovenfor. Denne teorien er naturligvis formelt helt ekvivalent med den vi avgrenset og definerte i §3.

Det tredje alternativet er dette: Man sløfer enkelhetspredikatet fra språket til den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet og erstatter dette med "Ba(x,y)" som et nytt ikke-logisk predikat. I dette tilfellet må vi erstatte aksiomene E1 - E3 med aksiomer for predikatet "Ba(x,y)". Det er mulig å finne et sett av slike grunnsetninger som er ekvivalente med E1 -E3 supplert med (+) enten som definisjon eller ikke-logisk aksiom. Setter vi per definisjon $B = Mg(\langle x,y \rangle : Ba(x,y))$ vil det være tilstrekkelig å legge til to grunnsetninger nemlig $Ba(x,y) \rightarrow x,y \hat{e} U$, en grunnsetning som er innlysende, og en grunnsetning som sier at det ordnete par $\langle I,B \rangle$ er en *akseptansestruktur*[13], en grunnsetning som ikke er fullt så innlysende. Velger man dette siste alternativet kan man utlede såvel (+) som E1 -E3 om man definerer enkelhetsrelasjonen R på den måten som det er gjort ved Definisjon 5.2 i Rognes [7], "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner".

Så langt har vi i dette avsnittet forsøkt å belyse den akseptansteoretiske del av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet ved å se på endel alternative aksiomatiseringer av denne del av teorien. Dette har beskjeftiget oss fordi det alltid er en fordel å kunne se en teori fra forskjellige synsvinkler og det å angi ekvivalente aksiomatiseringer av en teori alltid gir en et noe dypere innsikt i teorien. Vi skal nå gå over til et litt annet tema som også er relevant i denne forbindelse.

Vi har ikke forsøkt å gi noen analyse av enkelhetsrelasjonen over mulige verdener. Det kan imidlertid være av en viss interesse å presentere noen tentative tanker om dette tema. Hvorvidt en logisk mulig verden w er enklere (har større grad av koherens, harmoni og enkelhet) enn en annen verden w' synes ikke å være fullstendig urelatert til det system av kausallover som gjelder i de to verdenene w og w'. Er det system av kausallover som gjelder i

13 Se Rognes [7], "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner", Definisjon 3.6, Definisjon 5.1 (hhv. på side 8 og side 23, samt resultatene som det gis bevis for i §6 i dette skrift.

© Morten Harboe Rognes 2019

verdenen w' langt mer komplisert enn det system av kausallover som gjelder i verdenen w virker det nærliggende å si at verdenen w er enklere enn verdenen w'. Tenker man seg videre at totalsystemet av kausallover som gjelder i disse to verdenene w og w' er det samme virker det heller ikke umiddelbart urimelig å si at de to verdenene er like enkle. Forutsetter man ytterligere at totalsystemet av de kausallover som gjelder i disse to verdenene enn mer er av deterministisk natur, slik at totaltilstanden ved et gitt tidspunkt i en verden der disse lovene gjelder entydig bestemmer totaltilstanden ved alle andre tidspunkter, virker det ikke som det forhold at totaltilstanden i w ved et gitt tidspunkt t er en annen enn i verdenen w' skulle ha noen innvirkning på spørsmålet om w er enklere enn w'. Det virker i dette tilfellet snarere plausibelt å hevde at de er like enkle.

Vi vil forsøke å formalisere disse litt løse tankene noe for å få poenget tydeligere frem. Vi tenker oss at vi i første omgang innfører predikatet "x er en kausallov som gjelder i verdenen w". Vi går ut fra at dette predikatet gir mening og vil ikke diskutere dette nærmere akkurat her. Vi tenker oss altså at språket til den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet utvides med dette predikatet som vi forkorter med "CLov(x,w)". Et ytterst rimelig aksiom for dette predikatet, nærmest fullstendig trivielt er:

L1 $\quad CLov(x,w) \rightarrow w \hat{e} I$

Med det totale system av kausallover som gjelder i verdenen w, L;w, mener vi mengden av alle de kausallover som gjelder i verdenen w. Med andre ord setter vi $L;w=Mg(x: CLov(x,w))$. Man kan ikke utlede fra fra L1 sammen med de mengdeteoretiske aksiomene at L;w er en mengde. Det må en egen grunnsetning til for å sikre denne, i og for seg rimelige påstand. Vi legger derfor til det følgende aksiom:

L2 $\quad (Aw)(w \hat{e} I \rightarrow M(L;w))$

Mengden av alle totalsystemer av kausallover, L, er mengden av de diverse L;w ettersom w gjennomløper mengden av mulige verdener I. Formelt sett definerer vi L ved å sette $L = Mg(L;w: w \hat{e} I)$.

Vi skal nå innføre nok et predikat nemlig det følgende: "x er et totalsystem av kausallover som har en større grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn totalsystemet y". Vi forkorter dette med "Enk;C(x,y)". Det er åpenbart, i lys av lesemåten til dette predikatet, at følgende grunnsetning bør oppfattes som rimelig:

L3 $\quad Enk;C(x,y) \rightarrow x,y \hat{e} L$

der L er definert som ovenfor. Det er imidlertid endel andre påstander som virker plausible når det gjelder relasjonen Enk;C. For det første kan ikke et totalsystem av kausallover være enklere enn seg selv. Av denne grunn virker det følgende postulat rimelig:

L4 $\quad (Ax)(x \hat{e} L \rightarrow \neg Enk;C(x,x))$

For det andre virker det trivielt at Enk;C er en transitiv relasjon. Med andre ord holder følgende grunnsetning generelt:

© Morten Harboe Rognes 2019

L5 Enk;C(x,y) & Enk;C(y,z) → Enk;C(x,z)

Det er imidlertid ytterligere en påstand som er viktig å nevne: Fra en rent logisk synsvinkel er det i og for seg intet som hindrer at det finnes logisk mulige verdener w der ingen kausallover gjelder, det vil si verdener w der vi har ¬(Ex)CLov(x,w). Da har vi naturligvis på basis av definisjonen av L;w at L;w=ø. Det virker inidlertid rimelig å hevde at enhver verden der ingen kausallover gjelder overhodet må være en verden som er fullstendig kaotisk, hvor alle forutsigelser er fullstendig umulige, og som derfor må være mer komplisert enn enhver verden hvor det finnes kausallover uansett hvor kompliserte disse er. Det virker derfor rimelig å postulere:

L6 xêL & x≠ø → Enk;C(x,ø)

Vi har nå sett på noen antagelser om enkelhet i forbindelse med totalsystemer av kausallover. La oss nå se på hvordan det er mulig å definere enkelhetsrelasjonen ved hjelp av de begrepene vi har innført og dessuten vise hvordan man kan utlede grunnsetningene E1 - E3 ved hjelp av L1 - L6 og denne definisjonen. Vi definerer Enk på denne måten:

Definisjon 5.3.1 Enk(w,w') ↔. w,w'êI & (L;w = L;w' v Enk;C(L;w, L;w'))

Gitt denne definisjonen er det nå mulig å definere en variant av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Vi fjerner predikatet "Enk(w,w')" fra denne teorien og dessuten aksiomene E1 - E3. I stedet for predikatet "Enk(w,w')" legger vi til predikatene "Clov(x.w)" og "Enk;C(x,y)" som nye ikke-logiske predikater. I stedet for E1 -E3 legger vi til L1 - L6 som nye ikke-logiske aksiomer. I denne varianten av teorien bruker vi de gamle definisjonene av R,R*, Max(R,x), og Ba(x,y). Som nevnt får vi da en teori hvor man kan utlede E1-E3. Kort sagt en teori som er litt sterkere enn den teorien som vi definerte i §3 og som fremdeles er vår offisielle teori. I resten av denne paragrafen skal vi arbeide innenfor rammen av denne nye reviderte teorien.

Fra Definisjon 5.3.1 følger umiddelbart E1, ie. at Enk(w,w') → w,w'êI. Anta nå at wêI for vilkårlig w. Da har vi wêI & L;w=L;w ikraft av definisjonen av L;w og grunnsetningen L2. Men fra dette og Definisjon 5.3.1 følger Enk(w,w). Dette viser at (Aw)(wêI → Enk(w,w)). med andre ord at E2 holder.

Vi må imidlertid vise at E3 holder. Anta derfor for vilkårlige w1,w2,w3 at
(1) Enk(w1,w2) & Enk(w2,w3). Ved hjelp av Definisjon 5.3.1 følger da:
(2.1) w1,w2êI & (L;w1 = L;w2 v Enk;C(L;w1, L;w2))
(2.2) w2,w3êI & (L;w2 = L;w3 v Enk;C(L;w2, L;w3))
Herav følger naturligvis (3) w1,w3êI. Man ser at det er i alt fire tilfelle som må undersøkes. I det første tilfellet har vi L;w1 = L;w2 & L;w2 = L;w3. Fra dette følger L;w1= L;w3 og derfor i lys av definisjonen ovenfor og (3) at Enk(w1,w3).

I det andre tilfellet har vi (4) L;w1 = L;w2 & Enk;C(L;w2, L;w3). Herav følger umiddelbart Enk;C(L;w1, L;w3) og derfor ved hjelp av Definisjon5.3.1 og (3) at Enk(w1,w3). I det tredje tilfelle har vi L;w2 = L;w3 &Enk;C(L;w1, L;w2). Herav kan vi så slutte Enk(w1,w3) akkurat på samme måte som i det foregående tilfelle.

Det gjenstår bare en mulighet, nemlig at Enk;C(L;w1, L;w2) & Enk;C(L;w2, L;w3)

© Morten Harboe Rognes 2019

Men fra disse disse to påstandene og L5, som sier at Enk;C er transitiv utleder man umiddelbart at Enk;C(L;w1,L;w3). Men fra dette, (3) og Definisjon 5.3.1 følger igjen at Enk(w1,w3). I alle tilfelle har vi Enk(w1,w2). Det følger at man har

Enk(w1,w2) & Enk(w2,w3) → Enk(w1,w3). Vi har altså at E3 holder.

Dette avslutter vårt bevis for at E1 - E3 kan utledes i denne reviderte versjonen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet.

Som vi har nevnt tidligere definerer vi enkelhetsrelasjonen Enk(w,w') innenfor rammen av den reviderte versjonen av den fulle teori om akseptanse og sannsynlighet ved hjelp av Definisjon 5.3.1 ovenfor. Enkelhetsrelasjonen R er som tidligere definert ved R= Mg(<w,w'>: Enk(w,w')). Men i lys av Definisjon 5.3.1 er denne definisjonen ekvivalent med:

(1) R= Mg(<w,w'>: w,w'êI & (L;w=L;w' v Enk;C(L;w, L;w')))

Vi skal også definere et annet begrep vi trenger. Vi ønsker å forklare hva vi mener med *sannhetsmengden til et totalsystem av kausallover x.* Dette er mengden av alle de verdener der alle lovene i dette totalsystemet gjelder. Vi bruker "s(x)" som forkortelse for "sannhetsmengden til det totale system x av kausallover". Vi definerer dette slik:

Definisjon 5.3.2: s(x) = Mg(w': w'êI & (Ew)(wêI & x=L;w & L;w'=L;w))

Gitt disse definisjonene og de øvrige grunnsetninger som vi har gjort rede for ovenfor kan man nå bevise det følgende teorem:

Teorem 5.3.1: Anta w,w' êI Da har man:
(a) wR*w' ↔ Enk;C(L;w,L;w')
(b) Ekv;R(w,w') ↔ L;w = L;w'

Bevis: *Ad (a)*: Vi beviser først kondisjonalen mot høyre: Anta (1) wR*w'. I lys av definisjonen av R* impliserer dette (2) wRw' & ¬(w'Rw). Fra den første konjunkten i (2) og Definisjon 5.3.1 følger (3) w,w'êI & (L;w=L;w' v Enk;C(L;w, L;w')). Fra den andre konjunkten i (2) og samme definisjon kan man slutte, siden w,w'êI:

¬(L;w'=L;w) & ¬(Enk;C(L;w',Lw))

Men fra dette og (3) følger Enk;C(L;w,L;w'). Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder. La oss så se på kondisjonalen mot venstre: Anta (4) Enk;C(L;w,L;w'). Da har man siden w,w'êI åpenbart at wRw' ved hjelp av Definisjon 5.3.1. Vi må imidlertid også vise at ¬(w'Rw). Anta for reduktio at w'Rw. Da følger ved hjelp av Definisjon 5.3.1 at

L;w'=L;w v Enk;C(Lw',L;w). Fra den første disjunkten her og (4) følger Enk;C(L;w,L;w) som er umulig ifølge L4. Fra den andre disjunkten, (4) og L5 følger også Enk;C(L;w,L;w) som er utelukket i lys av L4. I begge tilfelle kan man utlede en motsigelse det følger at ¬(w'Rw). Siden wRw' har vi derfor wR*w'. Dermed har vi vist at punkt (a) holder.

Ad (b): Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre. Anta (1) Ekv;R(w,w'). Da har vi ved hjelp av definisjonen av Ekv;R at (2) wRw' & w'Rw. Fra (2) og Definisjon 5.3.1 kan man slutte:

© Morten Harboe Rognes 2019

(3.1) L;w=L;w' v Enk;C(L;w,L;w') og
(3.2) L;w'=L;w v Enk;C(L;w',L;w)

Det er i alt fire muligheter her. Har man L;w=L;w' & L;w'=L;w følger åpenbart L;w=L;w'. Har man L;w=L;w' & Enk;C(L;w',L;w) følger EnK;C(L;w,L;w) som sammen med det at w,w'êI strider mot grunnsetningen L4. Har man Enk;C(L;w,L;w') & L;w'=L;w følger likeledes Enk;C(L;w, L;w) som strider mot L4. De to sistnevnte mulighetene er derfor utelukket. I det siste tilfellet har vi Enk;C(L;w,L;w') & Enk;C(L;w', Lw) men da har man ved hjelp L5 at Enc;C(L;w, L;w) som igjen er utelukket. Av de fire mulighetene er altså alle utenom L;w=L;w' utelukket. Det følger at L;w=L;w' og derfor at kondisjonalen mot høyre holder.

Vi viser så kondisjonalen mot venstre: Anta (4) L;w= L;w' Man ser da umiddelbart at dette sammen med Definisjon5.3.1 impliserer wRw' & w'Rw, med andre ord at Ekv;R(w,w'). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende teorem er av viktighet fordi det angir en ekvivalent versjon av det vi har kalt enkelhetsprinsippet.

Teorem 5.3.2 Anta x,yêU, med andre ord at x og y er utsagn. Da gjelder at de følgende to betingelser er ekvivalente:

(a) ø ≠ Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x
(b) (ET)(TêL & s(T)Ω y≠ø &
(AT')(T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' → Enk;C(T,T')) &
s(T)Ωy Inkl x) [14]

Fra dette teoremet og enkelhetsprinsippet, dvs. prinsippet:

(+) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

kan man naturligvis utlede det følgende korollar:

Korollar 5.3.1 Man har om x,yêU at

Ba(x,y) ↔ (ET)(TêL & s(T)Ω y≠ø &
(AT')(T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' → Enk;C(T,T')) &
s(T)Ωy Inkl x)

Siden (+) er den definisjonen vi også bruker av akseptanserelasjonen Ba innenfor den

14 Det er nødvendig å gjøre helt klart hva denne betingelsen egentlig sier. La oss først se på TêL & s(T)Ωy≠ø. At TêL innebærer at T er et totalsystem av kausallover som er realisert i en eller annen verden. Det at s(T)Ωy≠ø innebærer at mengden av alle de verdener der totalsystemet T av kausallover foreligger realisert har visse elementer felles med sannhetsmengden til utsagnet y. Med andre ord innebærer s(T)Ωy≠ø at totalsystemet T av kausallover er logisk sett forenelig med utsagnet y. Ser man på betingelsen: (AT')(T'êL & s(T')Ωy≠ø & T'≠T → Enk;C(T,T')) sier denne at ethvert totalysystem av kausalover T' som er forenelig med y men distinkt fra T er mer komplisert enn T. Med andre ord sier de to første betingelsene at *T er det enkleste totale system av kausallover som er forenelig med utsagnet y.* Hva uttrykker så den siste konjunkten etter eksistenskvantoren? Denne betingelsen, s(T)Ωy Inkl x, sier at snittet av alle de verdenene der det totale system av kausallover er realisert og mengden av alle de verdenene der utsagnet y er sant er inkludert i mengden av de verdenene der utsagnet x er sant. Med andre ord er det umulig å finne noen verden der utsagnet y er sant og der totalsystemet T av kausallover er realisert og hvor utsagnet x er usant. Betingelsen sier derfor at *utsagnet y sammen med alle kausallovene i T impliserer utsagnet x*. Hele betingelsen sier derfor at det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er forenelig med utsagnet y og at konjunksjonen av disse lovene og y impliserer utsagnet x.

© Morten Harboe Rognes 2019

revidertе versjonen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet som vi har definert ovenfor gir naturligvis denne satsen oss en alternativ formulering av enkelhetsprinsippet siden korollaret ovenfor kan uttrykkes slik uten symboler:

Dersom x,y er utsagn har man at det er fornuftig å akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y dersom og bare dersom det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er konsistent med utsagnet y og utsagnet x er logisk sett implisert av konjunksjon av sannhetsmengden til dette totalsystem og utsagnet y

La oss nå gi et bevis for Teorem 5.3.2

Bevis: Anta x, yêU. Vi vil først vise at betingelsen (a) impliserer (b).

(**A)** Anta (1) ø≠ Max(R,y) Inkl x. Da har vi at det må finnes noe w0 der (2) w0êMax(R,y). Videre har vi selvfølgelig fra (1) at (3) Max(R,y) Inkl x. Fra (2) kan man lett utlede at (4) Max(R,y) = y Ω Mg(w: Ekv;R(w0,w). Siden y er et utsagn følger fra (2) at w0êI. Fra dette og grunnsetningen L2 kan man slutte at L;w0 er en mengde. Vi har derfor at (5) (ET)(T=L;w0) Men fra (4) og Teorem 5.3.1 kan man slutte at

(6) Mg(w: Ekv;R(w0,w) = Mg(w: L;w=L;w0) Fra (5) følger (7) T=L;w0 for noe T. Vi ønsker nå å vise at

(8) s(T) = Mg(w: Ekv;R(w0,w))

Anta w'ês(T) for vilkårlig w'. Da har vi ved hjelp av definisjonen av s(T) at (9) (Ew)(T=L;w& L;w=L;w'). Fra dette følger at det finnes w1 der (10) T=L;w1 & L;w1=L;w'. Fra dette og (7) følger L;w0 = L;w' og fra dette og (6) kan man så slutte at w'êMg(w: Ekv;R(w0,w'). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (8) holder.

La oss vise inklusjonen mot venstre: Anta w'êMg(w: Ekv;R(w0,w)). Da har man Ekv;R(w0,w'). Fra dette og (6) kan man slutte L;w'=L;w0. Sammen med (7) gir dette en at T=L;w0 & L;w0=L;w'. Da (Ew)(T=L;w & L;w=L;w'). Fra dette følger så ved hjelp av definisjonen av s(T) at w'ês(T). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (8).

Fra (8), (4) og (1) følger s(T)Ωy ≠ ø. Siden T=L;w0 har vi derfor (11) TêL & s(T)Ωy≠ø. Det følger også i lys av (1), siden s(T)Ωy=Max(R,y), at (12) s(T)Ωy Inkl x

For å fullføre beviset for satsen er det nå tilstrekkelig å vise at

(13) (AT')(T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' → Enk;C(T,T'))

Anta derfor for vilkårlig T' at (14) T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' . Fra den første konjunkten i (14) følger (14.1) T'=L;w1 for noe w1êI. Fra den andre konjunkten i (14) følger at det finnes w2 der vi har w2ês(T')Ωy. Ved hjelp av definisjonen av s(T) kan man herav slutte:

(15) w2êy & (Ew)(T'=L;w & L;w2=Lw) Siden T'=L;w1 ifølge (14.1) følger herav (16) L;w1 = L;w2. Fra den siste konjunkten i (14) har vi T≠T'. Siden T=L;w0 følger derfor i lys av (15) at (17) ¬(L;w0 = L;w2). Fra dette kan man slutte ved hjelp av Teorem 5.3.1 at ¬Ekv;R(w0,w2). Siden w2êy & w0êMax(R,y) følger herav at w0R*w2. Men da har vi , igjen ved hjelp av Teorem 5.3.1 at Enk;C(L;w0,L;w2). Men dette, (15) og (7) impliserer Enk;C(T,T'). Dette viser at (13) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at punkt(a) impliserer punkt (b).

(**B**) La oss nå vise at punkt (b) impliserer punkt (a). Anta derfor at (b) holder da finnes T der vi har:

© Morten Harboe Rognes 2019

(1.1) TêL & s(T)Ωy ≠ø
(1.2) (AT')(T'êL & s(T')Ωy≠ø & T'≠T → Enk;C(T,T'))
(1.3) s(T) Ωy Inkl x

Fra (1.1), definisjonen av L og definisjonen av s(T) kan man slutte at det finnes w1 og w2 der vi har: (2) T=L;w1 & w2ês(T)Ωy. Fra dette siste har vi:

(3) (Ew)(T=L;w & L;w=L;w2) & w2êy

Fra (2) og (3) kan man slutte (4) L;w1=L;w2 og derfor ved hjelp av Teorem 5.3.1: (5) Ekv;R(w1,w2). Anta nå for vilkårlig v at (6) vêy. Vi ønsker å vise at w2Rv. Sammen med siste konjunkt i (3) kan vi da i lys av definisjonen av Max konkludere med at w2êMax(R,y). Det er to muligheter når det gjelder v:

Tilfelle (i): Ekv;R(v,w2). Da har vi åpenbart at w2Rv

Tilfelle (ii): (7) ¬Ekv;R(v,w2) Nå har vi siden vêy ifølge (6) at vêy Inkl I. Det følger at vêI og derfor ved hjelp av L2 at L;vêL. La oss sette per definisjon: T'=L;v. Da har vi (7.1) T'êL. Vi kan ikke ha L;v=L;w1 for da følger Ekv(v,w2) ved hjelp av (4) og Teorem5.3.1. Vi har derfor (8) L;v≠L;w1 og derfor i lys av (2) og definisjonen av T' at (8.1) T'≠T. Siden vêy og s(T') = Mg(w': w'êI & (Ew)(T'=L;w & L;w=L;w') følger siden T'=L;v at (9) vêyΩs(T'). Fra (7.1), (8.1), (9) og (1.2) kan man slutte at (10) Enk;C(T,T'). Herav følger ved hjelp av (2), (4) og definisjonen av T' at Enk;C(L;w2, L;v) og derfor ved hjelp av Teorem 5.3.1 at w2R*v. Da w2Rv.

I begge tilfelle har vi w2Rv. Men v var vilkårlig element som oppfylte (6). Det følger at (Av)(vêy → w2Rv). Siden w2êy ifølge (3) kan vi derfor konkludere med at

(11) w2êMax(R,y). Fra dette følger (12) Max(R,y) ≠ø. Vi må nå vise at Max(R,y) Inkl x. Siden w2êMax(R,y) & Ekv;R(w1,w2) & T=L;w1 må man ha:

s(T) = Mg(v: Ekv;R(v,w1). Da følger s(T)Ωy = Max(R,y). Men fra dette og (1.3) følger det vi ønsker: Max(R,y) Inkl x.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

La oss avslutningsvis si noe om prinsippet:

(+) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

I teorien som vi definerte i §3 inngår ikke predikatet "Ba(x,y)", predikatet "Det er fornuftig å akseptere utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens som er tilgjengelig", som et primitivt predikat. Vi tok i akseptanseteorien bare med det relasjonelle enkelhetspredikatet som primitivt predikat og definerte "Ba(x,y)" ved hjelp av (+). Dette var av bekvemmelighetsgrunner. Men predikatet Ba(x,y) har mening helt uavhengig av enkelhetsrelasjonen. Det er derfor naturlig å se på (+) som et genuint prinsipp. Vi har som antydet kalt dette for enkelhetsprinsippet. Det kunne også ha blitt kalt for prinsippet om indre koherens, harmoni og enkelhet.[15] Det som er interessant med Teorem 5.3.2 er at det impliserer at dette prinsippet er ekvivalent med det prinsippet vi har satt i kursiv ovenfor. Dette kursiverte prinsipp synes intuitivt og heuristisk å ha større verdi enn (+) fordi man synes å ha noe klarere intuisjoner om når et totalsystem av kausallover er enklere enn et annet enn når en mulig verden har mindre grad av indre koherens , harmoni og enkelhet enn en annen mulig verden.[16]

15 Det må innrømmes at vi anser det siste navnet på prinsippet som mer suggestivt og mindre misvisende enn det første. Men det skulle neppe være nødvendig å starte en mer eller mindre hårkløvende diskusjon om dette.

16 Det er en tese om akseptanserelasjonen som kan formuleres innenfor rammen av vår teori som har en viss interesse. Det dreier seg om den følgende tese: (*) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠μ(y) Inkl μ(x)). Hva denne

© Morten Harboe Rognes 2019

§5.4 Eksempler på utsagn som det er rasjonelt å akseptere relativt til den evidens man har ved det nuværende tidspunkt.

Formålet med denne paragrafen er å gi en rekke eksempler på utsagn av typen Ba(x,e). Meningen er å gi konkrete eksempler på denne typen utsagn som virker rimelige og presumptivt sanne. Det bør understrekes at et utsagn av arten Ba(x,e), ie det er fornuftig å akseptere utsagnet x relativt til e, er relative utsagn. Om det er fornuftig å akseptere en påstand er det alltid relativt til et bestemt utsagn som angir alt det man kan ta for gitt. Et utsagn som " Det er fornuftig å akseptere α" er derfor ufullstendig og har strengt tatt ikke noen sannhetsverdi om man ikke føyer til et utsagn som angir eller beskriver den evidens som det er fornuftig å akseptere utsagnet α relativt til. I prinsippet kan dette være et hvilket som helst utsagn som er konsistent med det utsagnet som man ønsker å vite om det er fornuftig å akseptere eller ei. I praksis vil det imidlertid være (den uendelige) konjunksjonen av alle de utsagn som en eller annen vet er tilfelle ved det nuværende tidspunkt, t;0, som representerer den evidens vi vil ta i betraktning. Betegner vi dette utsagnet med e(t;0) vil alle de eksemplene vi gir være av formen Ba(x;i, e(t0)) for i= 1, ...,n,... .

De eksemplene vi vil gi kan inndeles i forskjellige kategorier:

Den første kategorien kunne omtales som enkle empiriske generaliseringer som man kjenner fra hverdagslivet. Dette er ikke den minst viktige kategorien. Eksempler hentet fra denne kategorien: Den påstand at dersom man koker et vanlig egg i ti til tolv minutter ved de forhold som ved det nuværende tidspunkt råder ved havoverflaten på jorden vil egget bli hardkokt. Man bør bemerke at dette er en generell påstand som er ment å holde ved ethvert tidspunkt i fremtiden såsant forholdene er som på jordoverflaten ved det nuværende tidspunkt. Et annet eksempel med de samme forutsetninger som i det foregående eksempelet er at dersom et egg kokes mellom fire og seks minutter vil det etter koketiden være bløtkokt. Man kan gi andre eksempler av denne art hentet fra "kjøkkenkroken". For eksempel at dersom man på en komfyr setter en stekeplate på maksimal styrke, setter en stekepanne på denne stekeplaten og dernest putter et stykke smør i stekepannen så vil smøret etter relativ kort tid smelte. La oss se på noen flere eksempler hentet fra denne kategori: Dersom en flaske fylles halvfull med vann mens flaskens bunn vender mot jordoverflaten vil inneholdet renne ut om man etter påfyllingen vender flasken slik at tuten vender mot jorden. Eller: Dersom man fyller glassflaske med vann og dernest legger den i et fryseskap hvor

tesen sier er, som man ser, at det er fornuftig å akseptere et utsagn relativt til y hvis og bare hvis utsagnet y er konsistent og utsagnet y impliserer x, dvs. det finnes ingen logisk mulig verden der utsagnet y er sant og utsagnet x er usant. Dette innbærer at dersom e er all den evidens som menneskeheten besitter ved det nuværende tidspunkt så er det eneste som bør aksepteres relativt til denne evidens det som logisk sett følger fra e. Enhver påstand som går utover dette, feks. en generell vitensakpelig teori kan det i såfall ikke være fornuftig å akseptere. Man kan vise at denne tesen er ekvivalent med at enkelhetsrelasjonen er identisk med IxI som naturligvis er en refleksiv og transitiv relasjon. Tesen er også ekvivalent med (Aw)(wêI → [w];R=I). Dette innebærer at enhver mulig verden er minst like enkel som enhver annen mulig verden. En annen konsekvens av denne tesen er at det ikke kan finnes noen akseptable induktive slutninger slik vi definerer dette begrep i §5.5.

© Morten Harboe Rognes 2019

temperaturen holdes konstant ved ca. -10 grader Celsius vil flasken etter en viss tid sprekke. Eller: Fjell som varmes kraftig opp og dernest avkjøles brått vil ha en tendens til å sprekke. Alle disse eksemplene avspeiler velkjente kausale regelsmessigheter som nær sagt enhver person kjenner til. Det er nærliggende å si at hadde ikke en rekke slike generelle empiriske lovmessigheter av det enkleste slag vært kjent fra de tidligste tider hadde ikke menneskeheten overlevd i det hele tatt.

La oss nå se på ytterligere noen kategorier. En annen kategori er hva man kunne kalle sofistikerte empirske lovmessigher som ligger til grunn for produksjon av varer av forskjellig art. Disse har karakter av oppskrifter. Et temmelig trivielt eksempel er oppskrifter av den typen man finner i kokebøker. Oppskrifter av denne art inneholder først en liste over hvilke varer som trengs for å kunne tilvirke det ønskede produkt og hvor mye av hver vare som trengs. Dernest følger ofte en punktvis liste som angir hvilke av varene som skal blandes sammen i forskjellige kvanta, hvordan de skal blandes og hvordan de skal behandles for videre oppbevaring. Endelig følger en detaljert beskrivelse av hvordan de enkelte komponentene for eksempel skal stekes, varmes opp og bearbeides før man kommer frem til det punkt hvor man står med det ferdige produkt i hendene.

En oppskrift kan altså bringes på formen: "Hvis man suksesivt følger instruksjonene I;1, ..., I;n så vil man tilslutt sitte igjen med produktene P;1, ..., P;j (j >=1) med de og de egenskaper". La oss se på noen eksempler: Hvis man konstruerer en masovn etter de og de spesifikasjoner, fyrer opp masovnen på foreskrevet måte og fyller den, etter at den har blitt tilstrekkelig oppvarmet, med lag på lag av koks og jernmalm vil man etter hvert kunne tappe flytende støpejern fra en utgang nederst i masovnen. Denne prosedyren og beslektede prosedyrer har i århundreder blitt brukt til å produsere støpejern, smijern og forskjellige ståltyper. Eller la oss betrakte den følgende enkle oppskrift: Anta (i) at man tar to blikkbokser og fyller den ene med spik fra trerot slik at denne spiken sitter tett og fast i boksen selvom man vender den opp ned. Anta (ii) at man dernest lager en grop i jorden og setter den tomme boksen med åpningen opp i denne. Anta (iii) at man så legger en blikkplate med et passe stort hull over den nedgravde blikkboksen slik at hullet på blikkplaten er i sentrum av den tomme blikkboksen. Anta så at man (iv) plasserer boksen med spik med åpningen ned over hullet i blikkplaten og at man stabler helt tørr kjøkkenved rundt den boksen fylt med spik slik at den er omgitt av et passe stort bål. Anta (v) at man tenner på bålet og lar det brenne ned. Realiserer man betingelsene (i) - (iv) vil det etter at bålet har brent ned være rent ned endel tjære i den nederste boksen. Dette er åpenbart et eksempel på en oppskrift i den betydning vi har definert ovenfor.

Det er flere momenter ved de eksemplene på oppskrifter vi har nevnt som det er verdt å nevne. For det første er det i prinsippet alltid menneskelig mulig å følge de instruksjonene som er nevnt i oppskriften. For det andre er det rimelig å tro at oppskrifter av den typen vi har beskrevet er reliable i den forstand at om de følges nøyaktig vil resultatet alltid bli produkter med de egenskaper som nevnes i oppskriften. For det tredje er de reprodusible i den forstand at man i prinsippet kan tenke seg et hvilket som helst antall personer som uavhengig av hverandre følger oppskriften og kan sammenligne resultatene og se om de blir de samme. For det fjerde har de alle karakter av hva man kan kalle eksperimentelt prøvbare setninger, det vil si generelle setninger av formen "Hvis A så B" der A beskriver en tilstand som det er menneskelig mulig å realisere og hvor B beskriver et saksforhold som man kan kontrollere om foreligger (ved sanseiaktagelse eller på annen måte) etter at A har blitt

© Morten Harboe Rognes 2019

realisert.

At oppskrifter av den typen vi har gitt eksempler på er reliable i betydningen ovenfor er strengt tatt ikke noe man vet er tilfelle. Det er logisk sett neppe noe som hindrer at de oppskrifter vi i dag bruker for å produsere stål eller glassplater ikke lenger gir dette resultat om tusen år fordi visse naturfenomener som vi i dag ikke har den ringeste anelse om inteferer i denne produksjons-prosessen. Dette kan logisk sett være mulig. Det følger fra dette at om det påstas at en oppskrift er reliabel fremsettes en påstand som strengt tatt går langt utover den evidens, alt det man vet ved det nuværende tidspunkt. I alt vesentlig fremsetter man en påstand om at en generell eksperimentelt prøvbar setning er sann til alle tider.

Når det gjelder oppskrifter i den betydning vi har forklart bør det understrekes at det finnes nær sagt uendelig mange av dem. Ta for eksempel et hvilket som helst verktøy en snekker bruker, en elektrisk batteridrevet drill, en elektrisk stikksag, et skrujern, en sirkelsag, en hammer, spikere, skruer og muttere, beslag av forskjellig art, en høvel, forskjellige typer trekitt, forskjellige typer skum som kan brukes til å fylle sprekker i dørkarmer, bor av forskjellige typer, vinkelhaker, målebånd, impregneringsmidler, plastfolie, verktøykasser, kort sagt alle de varer man kan kjøpe i et velutrustet byggevarefirma. Hver og en av disse varene, for eksempel en skrue med muttere er produsert i en eller annen fabrikk etter en eller annen komplisert oppskrift der man starter med visse råvarer og halvfabrikata samt et sett av maskiner og dernest etter visse nøyaktig foreskrevne instruksjoner masseproduserer varen. Tilsvarende for de andre varene vi har nevnt ovenfor.

Man kan mangfoldigjøre disse eksemplene på reliable oppskrifter ved å ta for seg en vare som selges på nær sagt ethvert marked og som masseproduseres industrielt. Det finnes oppskrifter på hvordan man produserer personbiler, lastebiler, traktorer, harver, såmaskiner, ploger. Videre er det ikke vanskelig å gi eksempler på oppskrifter for hvordan man kan produsere nær sagt alt fra plastgjenstander og maling til sprengstoff og tenningsmekanismer. Videre finnes reliable oppskrifter for hvordan vitenskapelig utstyr produseres, som kan dreie seg om alt fra reagensglass, kolber og bunsenbrennere til presisjonskronometere, vekter og termometere.

Vi skal omtale ytterligere en tredje kategori av påstander som det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt. Det dreier seg i denne forbindelse om vanlig kjente naturlover. Det virker ytterst rimelig å påstå at for eksempel lovene i den geometrisk optikk bør aksepteres relativt til den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt, i det minste om ikke lyset beveger seg over astronomiske avstander hvor det kan påvirkes av meget sterke gravitasjonskrefter. Tilsvarende virker det rimelig å tro at det er fornuftig å akseptere alle de grunnleggende lovene i kjemien relativt til den evidens vi har nå. Det samme gjelder Faraday og Maxwells lover innen elektristetslæren og talløse andre lover som kan nevnes fra andre områder i fysikken. Det virker også rimelig å utstrekke disse betraktningene til Newtons lover såsant anvendelsesområdet for disse lover ikke inkluderer legemer på atomært nivå og hastigheten til legemene ikke beveger seg opp mot lyshastigheten. Med disse begrensningene virker det fornuftig å akseptere, relativt til all den evidens man er i besittelse av ved det nåværende tidspunt, at Newtons lover gjelder med stor nøyaktighet og at de også vil gjøre det i fremtiden. Det virker heller ikke som det er noe grunnlag for å tro at ikke det samme skulle gjelde Einsteins teorier og de nyeste teorier innenfor kvantemekanikken i den utstrekning konskevensene av dem er velkjent, nøye

© Morten Harboe Rognes 2019

analysert og man har en virkelig god forståelse av hvordan de er relatert til alle andre relevante og velkjente fysiske teorier.

Det er også en annen type lover som bør omtales og som vi så langt ikke har omtalt, nemlig det vi kan kalle statistiske lover. Kaster man mynt og krone et stort antall ganger vil man alltid finne at antallet ganger man får mynt dividert på det totale antall ganger man har kastet er ca. 0.5, med andre ord at den relative frekvens til de tilfelle der man får mynt er 0.5. Man kan også ved et slikt eksperiment fastslå at det er umulig å se noe klart mønster når det gjelder fordelingen av mynt og krone ettersom man kaster. Det er for eksempel ikke slik at dersom man kaster mynten tusen ganger så vil man de femhundrede første gangene få krone og de fem hundre siste gangene få mynt. Ei heller er det slik at man får avvekslende mynt og krone ettersom man kaster. Det er i det hele tatt, erfaringsmessig, umulig å forutsi i hvilken rekkefølge man får mynt og krone. En spiller som satser på at han i det lange løp vil få mynt etter at de fire foregående kast har gitt krone som resultat, vil ikke ha noe å vinne på dette. Med andre ord finnes det ingen gevinststrategi i forbindelse med et slikt stokastisk eksperiment[17]. Man kan nevne en lang rekke eksempler av lignende art i forbindelse med terninger, lykkehjul, kortstokker, tombola, loddtrekning, krukker med fargede kuler etc.

For de fenomener vi nettopp har nevnt kan man nevne tilsvarende statistiske lover. Men man kan også nevne andre eksempler som ikke er hentet fra lykkespillenes område. At det alltid vil fødes omtrent like mange gutter som jenter hvis man tar for seg tilstrekkelig store

17 Man kan si at et stokastisk eksperiment er et eksperiment som er karakterisert ved tre egenskaper: For det første kan man gjenta det så mange ganger man vil. For det andre vil utfallet av eksperimentet alltid falle i nøyaktig en av et endelig (eller uendlig) antall disjunkte klasser som samlet omfatter alle de mulige utfall som eksperimentet kan ha. For det tredje er det slik at det er umulig å forutse hvilket utfall eksperimentet vil ha.

Man kan nå for eksempel tenke seg at et slikt eksperiment, hvor det bare er tre mulige utfall a,b og c, har blitt utført tusen ganger og at i disse tusen tilfellene har den relative frekvens av utfallene a,b og c vært omtrent en tredjedel på hver. Hvis man nå gjentar dette eksperimentet ytterligere en totusen ganger og får den samme fordeling, vil dette bekrefte den generelle stokastiske (statistiske) lov som sier at man alltid vil få omtrent denne fordelingen dersom man gjentar eksperimentet et tilstrekkelig stort antall ganger.

Det er ikke helt lett å gi noen fullstendig presis definisjon av statistisk lov, men det kan være av interesse å gi en mer generell tentativ definisjon. Man kunne si at et triple <E, <u;k>/kên/, ψ> representerer en statistisk lov hvis og bare hvis det oppfyller de følgende krav: (i) E er en egenskap.
(ii) De diverse <u;k>/kên/ er en samling av n egenskaper som er innbyrdes disjunkte og samlet uttømmende, dvs. at ethvert objekt logisk sett bare kan ha en og bare en egenskap i samlingen.
(iii) ψ: {u;1, ... u;n} → [0,1] der man har at Sum/i,1,n/(ψ(u;i)) =1 (iv) Gitt at et objekt har egenskapen E er det helt umulig å si noe på forhånd om hvilke av egenskapene u;1, ... ,u;n det har.
(v) Om x;i er en uendelig sekvens av objekter og vi har E(x;i) for alle i har man at
(+) Lim/n →inf/ (Cd({x;1,...,x;n}ΩMg(x:u;k(x)))/n) = ψ(u;k)

Sammenligner man en statistisk lov <E, <u;k>/kên/, ψ> med et stokastisk eksperiment kan man si at egenskapen E tilsvarer det stokastiske eksperimentet. De diverse egenskapene <u;k>/kên/ svarer til de mulige utfallene i det stokastiske eksperimentet. Kravet (iv) i definisjonen vi har gitt svarer til uforutsigbarheten til de mulige utfallene ved et stokastisk eksperiment.

Det kan være passende å gi et eksempel på en statistisk lov <E, <u;k>/kên/, ψ>. La E være egenskapen å være et ordnet par <y,t> som er slik at y er et kronestykke som kastes opp i luften og som ved tidspunktet t ligger på marken med enten mynt- eller kronesiden opp. La u;1 være egenskapen å være et ordnet par <y,t> der y er et kronestykke som ligger med myntsiden opp ved t. La u;2 være egenskapen å være et ordnet par <y,t> der y er et kronestykke som ligger med kronesiden opp ved t. La tilslutt ψ være funksjonen som tilordner egenskapen u;1 verdien 1/2 og egenskapen u;2 verdien 1/2. Det virker da rimelig å si at triplet <E, <u;k>/kê{1,2}/, ψ> oppfyller de krav vi har nevnt ovenfor til en statistisk lov.

© Morten Harboe Rognes 2019

fødselskull har åpenbart karakter av å være en statistisk lov. Av samme kategori er den påstand at dersom man måler høyden til alle gutter som er født i samme år vil utvalget, dersom det er tilstrekkelig stort, være normalfordelt. Videre kan man nevne statistiske lovmessigheter i forbindelse med levetiden til lyspærer som er fabrikert på nøyaktig samme måte.

Vi har ovenfor nevnt en lang rekke prosedyrer eller oppskrifter på hvordan ting kan produseres og understreket at det er fornuftig å akseptere at disse oppskriftene, om de følges, alltid vil gi det samme resultat. Med andre ord representerer disse oppskriftene empiriske lovmessigheter som det er fornuftig å akseptere på bakgrunn av den evidens vi har i dag (dvs. ved det nuværende tidspunkt.)

Disse empiriske lovmessighetene, fra de mest elementære, trivielle og hverdagslige til de mest sofistikerte som ligger til grunn når det gjelder for eksempel konstruksjon av avanserte måleinstrumenter, utgjør det man kunne kalle summen av alle de teknologiske innsikter som man besitter i dag. Man kunne også kalle dette for den teknologiske kunnskap vi er i besittelse av (nå.)

Denne teknologiske viten utgjør et nødvendig grunnlag for våre handlinger og også vår mulighet for å planlegge. Uten å overdrive kan man si at den utgjør selve grunnlaget for vår sivilisasjon. Tenker man seg denne kunnskap vekk tenker man seg et menneske som lever på samme nivå som i steinalderen.

Det kan være vel verdt å reflektere over at den teknologiske viten er en form for kunnskap som utvikler seg kumulativt. De teknikker for produksjon av - la oss si hus - som man bruker i dag er forbedringer av de teknikker som man brukte for hundre år siden. De teknikker som man bruker for sementproduksjon nå er forbedringer av dem man brukte for år tilbake. På nær sagt hvilket som helst område av vareproduksjonen i et samfunn er teknikkene forandret og forbedret. Det er *nødvendig* at dersom en forbedring gjøres tas den i bruk. For ingen som bruker en bestemt oppskrift for å produsere en type gjenstander vil finne på å bruke en annen og ny oppskrift som er mer kostbar, mer tungvint og som gir et dårligere resultat.

Man kan også si at de praktisk pregede empiriske lovmessighetene som vi har nevnt, og som vi har kalt for den teknologiske kunnskap vi har, utgjør en nødvendig betingelse for den rent teoretiske og generelle kunnskap som man har i vitenskapene, dvs. resulatene av såkalt "grunnforskning". Det ville trolig ha vært en lang rekke teorier i, la oss si, fysikken som ville ha hengt mer eller mindre i løse luften dersom man ikke hadde hatt den teknologiske viten som skulle til for å bygge og produsere den apparatur som skal til for å kunne utføre de eksperimenter som eventuelt kunne bekrefte eller avkrefte disse teorier. Man kunne for eksempel neppe fått bekreftet teorien om svarte hull om man ikke hadde kunnet bygge avanserte teleskoper. Og man kunne neppe ha bygget disse teleskoper om man ikke hadde visst hvordan man slipte linser, produserte hulspeil, og allerede på forhånd hadde en uhyre avansert teknologisk kunnskap. Det er riktig at avansert teoretisk forskning kan lede til at man oppdager helt nye empiriske lovmessigheter som var helt ukjente før. (Man kan tenke på alt fra TV-apparater til mobiltelefoner.) Men det er trolig også riktig å si at denne forskningen ikke hadde blitt lovprist i samme grad om den ikke hadde ledet til noen som helst praktiske resultater.[18]

18 Dette innebærer ikke at all teori som ikke kan etterprøves empirisk ikke fortjener respekt. Matematikkens og logikkens teorier er selvfølgelig ikke prøvbare. Men de gir en likevel kunnskap om virkeligheten. Man

© Morten Harboe Rognes 2019

La oss nå oppsummere det vi har gjort i denne paragrafen. Vi har i all hovedsak hatt til hensikt å gi eksempler på utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt. Lar vi e betegne det utsagn som representerer all den evidens vi har nå, kan man si at vi har gitt en rekke eksempler på presumptivt sanne setninger av typen Ba(x,e). Av utsagn vi har nevnt som kan erstatte x er empiriske lover av forskjellig art. Vi har nevnt eksempler som strekker seg fra enkle lovmessigheter som enhver baserer seg på i hverdagslivet til teknologisk avanserte lovmessigheter som ligger bak produksjonen av avanserte vitenskapelige instrumenter. Gitt den evidens vi har er det fullkomment irrasjonellt å benekte at disse lovmessighetene gjelder ved ethvert tidspunkt og uansett hvor man befinner seg i universet såsant forholdene der er som forholdene på jordkloden ved det nuværende tidspunkt. Relativt til den evidens vi faktisk har bør disse utsagnene oppfattes som sikre, og derfor, om de kan tilskrives noen sannsynlighet, tilskrives en sannsynlighet lik 1.

§5.5 Induktive slutninger

Det finnes en lang rekke slutningstyper som det er nærliggende å kalle for induktive. Vi skal ikke forsøke å gi noen uttømmende klassifikasjon av dem, men skal innskrenke oss til å nevne noen typer. En vanlig type er når man fra et endelig antall observasjoner av en regelmessighet slutter at regelmessigheten holder allment, dvs. holder ved ethvert tidspunkt og uansett hvor man befinner seg i universet. Man slutter altså fra det at endelig antall instanser av en generell setning av allmen lovkarakter holder til det at selve den generelle setningen holder. Man har for eksempel i et stort antall tilfelle iaktatt at smeltepunktet for bly er 327.5 grader celsius og slutter herav at bly uansett hvor man befinner seg og uansett tid smelter om det varmes opp til denne temperaturen. Man kan gi tilsvarende eksempler for kvikksølv eller titanium (som smelter ved 1668 grader celsius). Induktive slutninger av denne type kunne man kalle for induktive generaliseringer. En annen type slutninger, som også kan regnes som induktive generaliseringer, er når man slutter fra det at noen elementer i en bestemt klasse har en bestemt egenskap til at alle elementene i klassen har egenskapen. Man har for eksempel valgt ut vilkårlig 5000 av norske stemmeberettigede borgere og funnet ut at av disse stemmer 10 prosent på partiet X. Fra dette slutter man så at av alle norske stemmeberettigede borgere vil omtrent 10 prosent stemme på partiet X. Også dette kan oppfattes som en induktiv generalisering.

Nok en type av induktive slutninger er såkalte analogislutninger: Man har observert at alle de elementer man har undersøkt i en klasse X har egenskapen Y. Nå står man ovenfor en annen distinkt klasse med objekter X' der alle elementene har sterke likhetstrekk med dem i klassen X og man slutter herav at alle objektene i X' også har egenskapen Y, eller en egenskap Y' som ligner svært på egenskapen Y.

Man kan også si at alle slutninger fra fenomener man har iaktatt nå til fenomener som finner sted i fremtiden eller til fenomener man ikke har iaktatt i fortiden også er av en induktiv natur.

Så meget om typer av induktive slutninger og eksempler på slike slutninger. Det kan være hensiktsmessig å gi en noe mer presis og generell definisjon av hva som her vil forstås med en induktiv slutning med utgangspunkt i de eksemplene vi har antydet. Hvis man nå vil

kunne si at de bestemmer virkelighetens struktur og også indirekte bidrar til å definere hva som menes med fornuft og fornuftig tenkning.

© Morten Harboe Rognes 2019

karakterisere begrepet induktiv slutning nærmere synes det for det første nærliggende å peke på det trivielle faktum at en induktiv slutning alltid har visse premisser og en konklusjon. Videre virker det opplagt at premissene og konklusjonen i en induktiv slutning må være deskriptive utsagn. Dessuten skulle det være klart fra de eksemplene vi har gitt at premissene i en induktiv slutning ikke logisk sett impliserer konklusjonen og at det er rimelig å se på dette som et definistorisk trekk ved induktive slutninger. Endelig virker det nærliggende å kreve av en induktiv slutning at konklusjonen er konsistent med premissene. I motsatt fall vil premissene logisk sett implisere implisere negasjonen av konklusjonen. Tilslutt virker det rimelig å kreve at premissene i en induktiv slutning utgjør et konsistent utsagnssett. Ser man på de eksemplene vi har gitt oppfyller de alle dette krav om konsistens.

Gitt disse overveielsene virker det nærliggende å definere en induktiv slutning som et ordnet par <Δ,x> der Δ er en ikke-tom konsistent mengde med utsagn og x er et utsagn og der dette paret oppfyller de følgende to krav: (a) Det finnes en logisk mulig verden der alle utsagnene i Δ er sanne og hvor utsagnet x er usant og (b) det finnes en mulig verden der alle utsagnene i Δ er sanne og hvor også utsagnet x er sant. Denne definisjonen kan naturligvis formaliseres fullstendig innenfor rammen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet.[19]

Det følger fra denne definisjonen at konjunksjonen av premissene i en induktiv slutning aldri logisk sett impliserer konklusjonen. En induktiv slutning er derfor ingen deduktiv slutning om man med en deduktiv slutning mener et ordnet par <Δ,x> der Δ er en konsistent ikke-tom mengde med utsagn, x et utsagn og det ikke finnes noen verden der alle utsagnene i Δ er sanne og utsagnet x usant.

Det kondisjonalutsagn som har konjunksjonen av premissene i en induktiv slutning <Δ,x> som antesedent og konklusjonen som konsekvent er, om vi holder oss til den definisjonen vi har innført, alltid et kontingent utsagn. Det kan aldri være et logisk nødvendig utsagn. En induktiv slutning kan derfor aldri være konklusjonen i en resonnementskjede der alle slutningene er logisk gyldige og hvor de dypeste premissene er nødvedig sanne utsagn. Det finnes derfor ingen rent logisk rettferdigjørelse av induktive slutninger. De kan av denne grunn ikke utledes fra rent logiske og matematiske prinsipper alene.

I lys av det som er sagt ovenfor er det nærliggende å inndele slutninger, ie. par av typen <Δ,x> der Δ er en ikke-tom konsistent mengde av utsagn og x et utsagn, i tre disjunkte hovedklasser. For det første har vi de *inkonsistente* slutningene. Det er de slutningene <Δ,x> der ΔU{x} utgjør en inkonsistent utsagnsmengde. På den annen side har vi de *konsistente* slutninger. Det er de slutningene der ΔU{x} utgjør en konsistent utsagnsmengde. Innenfor de konsistente slutningene har vi så de deduktive slutningene der x er logisk sett implisert av utsagnene i Δ og de ikke-deduktive slutningene hvor x ikke er implisert av utsagnene i Δ. Denne siste klassen av slutninger er nøyaktig de induktive slutningene. Det følger at en slutning altså nødvendig vis faller i en og bare en av de følgende klasser: Enten dreier det seg om en inkonsistent slutning eller så dreier det seg om enten en deduktiv eller en induktiv slutning. Innenfor klassen av induktive slutninger virker det imidlertid rimelig å sondre mellom de slutninger som virker fornuftige og har en viss plausibilitet fra dem som åpenbart virker besynderlige og urimelige. For eksempel virker det rimelig å slutte fra all den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt at det holder generelt at egg som legges i kokende vann i ti minutter blir hardkokte, mens det virker besynderlig på basis av denne evidens å hevde at

19 Definisjonen kan formaliseres slik: <Δ,x> er en induktiv slutning hvis og bare hvis ø≠Δ Inkl Pt(I) & xêPt(I) & μ(SNu(Δ))≠ø & μ(SNu(Δ))Ω μ(x) ≠ø & μ(SNu(Δ))Ω μ(Neg(x)) ≠ø

© Morten Harboe Rognes 2019

dette vil holde i hundre år til, men etter denne tid vil det ta tyve minutter før et egg blir hårdkokt. Likeledes virker det besynderlig om man på grunnlag av den evidens vi har nå, som viser at ethvert menneske som er født nå eller før dette dette tidspunkt enten er død eller vil være død før år 2400, trekker den slutning at ethvert menneske vil være død før 2400.

I lys av disse overveielsene virker det rimelig å tro at klassen av induktive slutninger i seg selv kan deles inn to disjunkte delmengder, nemlig de induktive slutninger som er akseptable og de som ikke er det. Det synes derfor rimelig å hevde at det tradisjonelle induksjonsproblem består i (a) å angi et rimelig kriterium for hvordan man kan skille mellom disse to slutningstypene og (b) hvordan man kan begrunne et slikt kriterium. La oss nå gå over til noen betraktninger over hvordan den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet kan kaste noe lys over dette tradisjonelle induksjonsproblem.

Det er intet som forhindrer en fra å betrakte alle de induktive slutninger <Δ,x> der vi har at utsagnet x beskriver et forhold det er fornuftig å akseptere gitt at snittet av utsagnene i Δ representerer all den evidens vi har. Med andre ord kan man betrakte alle de induktive slutningene <Δ,x> som er slik at Ba(x, SNu(Δ)). Siden vi allerede har utformet en teori om akseptanse, mer presist om akseptanserelasjonen Ba, kan det umulig være forbudt å betrakte mengden av alle de induktive slutningene som oppfyller dette kravet. Heller ikke kan det være forbudt å gi denne mengden av induktive slutninger et navn.Vi skal kalle denne mengden av induktive slutninger for "rasjonelt akseptable induktive slutninger" eller kortere "akseptable induktive slutninger".

På samme måte som man i akseptanseteorien, ie. E1 - E3 supplert med vår definisjon av Ba og de andre definisjonene vi har nevnt kan utlede en rekke setninger om hvilke utsagn det er fornuftig å akseptere relativt til et utsagn y gitt andre påstander om hva som er fornuftig å akseptere relativt til y kan man på samme måte, gitt vår definisjon av akseptabel induktiv slutning utlede en rekke satser (av mer eller mindre interessant karakter) om hvilke induktive slutninger som er akseptable gitt at andre er det. Dette innebærer at for visse induktive slutninger kan man på rent deduktivt vis vise at de er akseptable ved rent logisk å utlede dem fra andre akseptable slutninger. Vet man for eksempel at <Δ,x1>, <Δ,x2> og <Δ, x1 Ω x2> er induktive slutninger (i vår betydning) og vet man at de to første er akseptable følger det på basis av aksiomene i akseptanse teorien at også den siste induktive slutningen er akseptabel. Dette innebærer at akseptabiliteten til noen induktive slutninger kan tilbakeføres til andre. Men en slik tilbakeføringsprosess kan ikke i praksis skje i det uendelige. Før eller senere må man stanse opp ved noen induktive slutninger viss akseptabilitet bare kan innses mer eller mindre direkte ved at man omhyggelig reflekterer over hva premissene og konklusjonen i slutningen faktisk sier og ved at man reflekterer over betydningen til ordet "fornuftig". Det vil si at man reflekterer nærmere over betydningen til konstruksjonen "Det er fornuftig å akseptere at α gitt at β representerer all forliggende evidens" eller til det tilsvarende predikatet "x er et utsagn som det er fonuftig å akseptere gitt at y representerer all tilgjengelig evidens". Som alle andre mer eller mindre vanlig brukte ord har dette uttrykket en mening og enhver som har lært å bruke dette ordet på vanlig måte innser umiddelbart at visse setninger som inneholder det er rimelige og andre ytterst urimelige.

Vi har forsøkt å illustrere dette ved at vi i forrige paragraf har gitt en rekke eksempler på generelle empiriske regelmessigheter som det nokså åpenbart er fornuftig å akseptere gitt all den evidens menneskeheten er i besittelse av ved det nuværende tidspunkt og vi har i en viss utstrekning forsøkt å illustrere (eller i det minste innprente) for leseren det absurde i å

© Morten Harboe Rognes 2019

benekte at det er fornuftig å akseptere disse *relativt til den nåværende evidens*.[20]

Like lite som en matematisk sannhet kan bekreftes eller falsifiseres ved empiriske undersøkelser eller eksperimenter, kan en påstand av typen Ba(x,y) bekreftes, svekkes eller vises å være usann på basis av empiriske undersøkelser. Hvis en slik setning er sann er den nødvendig sann og siden det åpenbart ikke kan dreie seg om noen analytisk setning må det dreie seg om en syntetisk apriori sannhet. Et utsagn av typen Ba(x,y) som er sant er derfor ikke noen empirisk hypotese, tentativ gjetning eller kontingent sannhet. Den representerer snarere en standard ved hjelp av hvilken vi kan skille mellom sunn fornuft og galskap. Det følger fra dette at mengden av alle akseptable induktive slutninger utgjør et system av apriori syntetiske sannheter.

La oss nå gå tilbake til det vi ovenfor kalte det tradisjonelle induksjonsproblem. Når det gjelder den reviderte teorien om akseptanse og induksjon kan man i denne teorien utlede to kriterier for når en induktiv slutning er rasjonelt akseptabel. Det ene kriteriet er at en induktiv slutning er akseptabel hvis og bare hvis mengden av de enkleste verdnene som inngår i sannhetsmengden til konjunksjonen av premissene i slutningen er ikke-tom og denne mengden av verdener er inkludert i sannhetsmengden til konklusjonen i slutningen. Dette er bare en variant av det prinsippet som vi i §5.3 kalte for *prinsippet om indre koherens, harmoni og enkelhet*. Det andre kriteriet sier at en induktiv slutning er akseptabel hvis og bare hvis det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er forenelig med alle premissene i slutningen og konklusjonen i slutningen er logisk sett implisert av konjunksjonen av premissene og dette enkleste totale sett av kausallover. Dette gir en svar på det første av de to spørsmålene vi nevnte i forbindelse med det tradisjonelle induksjonsproblem. Det andre spørsmålet er hvordan man kan begrunne de kriteriene vi har gitt. Hvis man her med en begrunnelse mener et strengt ikke-trivielt bevis for at disse kriteriene holder der bevisets premisser er selvinnlysende sannheter, må det innrømmes at vi i det minste ikke har lykkes i å fremvise noe slikt bevis. Det som imidlertid kan nevnes er det vi omtalte i §5.3. Det er faktisk mulig å fjerne enkelhetspredikatet fra den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet og erstatte det med predikatet "Ba(x,y)". Dette predikatet blir da et primitivt predikat i teorien. Definerer vi så B ved å sette B= Mg(<x,y>: Ba(x,y)) og legger til som nye aksiomer, for det første at Ba(x,y) → x,yêU, og for det andre at <I,B> er en akseptansestruktur i den betydning som er definert i i §5 i Rognes[7], kan man definere predikatet "Enk(w,w') ved hjelp av "Ba(x,y)". I denne teorien kan man så ved ikke-trivielle beviskjeder vise, ikke bare at enkelhetsrelasjonen er en preordning, men også at prinsippet om indre koherens, harmoni og enkelhet holder. Hvis man ikke legger stiller altfor strenge krav til deduktiv begrunnelse, for eksempel krever at de grunnsetningene man tar sitt utgangspunkt i skal være fullkomment selvinnlysende, kan dette passere som en dedutiv begrunnelse for de to kriteriene vi har nevnt ovenfor.

I forbindelse med det vi ovenfor kalte det tradisjonelle induksjonsproblemet kan man stille det følgende spørsmål, som det ikke er helt søkt å kalle en variant av "induksjonsproblemet":

Kan en påstand om at en universell eksplanatorisk teori er sann bli rettferdiggjort på empirsk grunnlag, det vil si ved å anta sannheten til visse observasjonsutsagn?

20 Det hører med til menneskets livsvilkår på denne kloden at det handler under en kronisk uvisshet. Hva som det er fornuftig å akseptere om hundre år kan man derfor ikke vite på det nuværende tidspunkt. Men relativt til det vi nå vet er det åpenbart absurd å hevde at jordens gravitasjonsfelt vil være helt annerledes imorgen klokken tolv.

© Morten Harboe Rognes 2019

Hvis "rettferdigjøre" her betyr "bevise ut fra et sett av rent logiske og matematiske sannheter" er svaret ganske åpenbart benektende. Det er dessuten vanskelig å se at noen annen tolkning av "rettferdiggjøre" er rimelig i denne sammenheng. Dette forhindrer imidlertid ikke at det er umulig å begrunne at det er fornuftig å akseptere at en universell påstand er sann relativt til en mengde av observasjonsutsagn, for eksempel mengden av alle de observasjonsutsagn som man kjenner til på det nuværende tidspunkt. At overgangen fra premisser til konklusjon i en induktiv slutning ikke er logisk nødvendig innebærer ikke, som vi har understreket ovenfor, at det ikke kan være fornuftig å akseptere konklusjonen gitt at konjunksjonen av premissene representerer all den evidens vi kan ta for gitt.[21]

I forbindelse med akseptanserelasjonen Ba er det nødvendig å understreke endel forhold. La oss tenke oss at utsagnet e representerer all den evidens man har ved det nåværende tidspunkt t. (e kan oppfattes som konjunksjonen av alle de empiriske data man har ved dette tidspunkt t.) Anta videre at e' er all den evidens man har ved tidspunktet t' der t' er et tidspunkt som kommer etter t. Det som er viktig å understreke er da dette: Selvom det kan være fornuftig å akseptere et utsagn eller en teori x relativt til e kan man ikke fra dette slutte at det nødvendigvis er fornuftig å akseptere x relativt til e', den evidens man har ved t'. Det er alltid logisk mulig at den evidens man har ved et senere tidspunkt inneholder data som logisk sett er uforenelig med utsagnet eller teorien x. I så fall har man selvfølgelig ¬ Ba(x,e'). I noen tilfelle kan det også være at man har Ba(Neg(x), e'). Eksempelvis er det logisk mulig at det

21 Popper er opptatt av gjendrivelsen av teorier og den kritiske testing av dem. (Det bør nevnes at det har alle vitenskapsmenn vært opptatt av og tillagt stor vekt lenge før Popper.) To teorier som gir forskjellige forutsigelser kan imidlertid være like strengt testet ved et gitt tidspunkt og det kan være like lett å falsifisere den ene som den andre. Dette gjelder egentlig for et overtellbart antall teorier. Spørsmålet er da hvilke av alle disse strengt testete teoriene man bør velge. I denne forbindelse kan man trekke frem eksemplene ovenfor, nemlig H1 som er en generell universell empirisk prøvbar teori, og alle teoriene av typen H2(t) der t er et tidspunkt som kommer etter det nuværende tidspunkt. De siste er ikke mindre generelle. Hvis man tenker seg at H1 blir testet strengt i ti år fremover i tid frem til tidspunktet t0 og har overlevd inntil da vil også enhver hypotese av typen H2(t) der t > t0 være like strengt testet og ha overlevd i like stor grad som H1. Man kan derfor ikke ved streng testing si noe om hvilke av teoriene H1 og og de uendelig mange teoriene av typen H2(t) der t > t0 som det er fornuftig å ha tillitt til. Utelukker man de diverse H2(t) må det derfor være av rent apriori grunner. Det kan heller ikke være noen grunn til å anse at noen av hypotesene H2(t) skulle ha noen mindre grad av falsifiserbarhet enn H1. Men siden det virker direkte evident at det er fornuftig å akseptere H1 relativt til all den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt, mens det åpenbart ikke er fornuftig å akseptere noen av H2(t) der t>t0 hvis ordet "fornuft" og "fornuftig" skal ha sin normale mening følger det at Popper ikke har noe å noe å bidra med når det gjelder spørsmålet om hvilke teorier - av alle dem som har overlevd streng testing - og som man skjønner vil dette være uendelig mange - som man bør fatte tillitt til og som det er fornuftig å bruke tid på å undersøke videre. Det er dette som med rette kan kalles induksjonsproblemet. Popper har derfor ikke ydet en unse til løsningen av dette problem. Dette bekreftes ved lesningen av Popper [1], kapittel 1, se spesielt §12 i dette kapitlet. Det bør også noteres at Popper i dette kapitlet ikke på noe punkt kan sies å ha argumentert eksplisitt i mot det vi ovenfor har kalt enkelhetsprinsippet, som er den påstand at det som følger fra den evidens vi har nå sammen med det enkleste totale system av kausallover som er forenelig med denne evidens er det som er fornuftig å akseptere relativt til denne evidens. Men dette prinsipp legger et meget sterkt krav på alle de uendelig mange strengt testete teoriene som er kompatible med den evidens vi har og gjør det nesten entydig hvilke av disse man bør velge. Det gir en derfor et kriterium som kan brukes til å begrunne påstander om hva det er fornuftig å akseptere av teorier som går utover den evidens man har. Det er i dette prinsipp man bør se en mulig løsning på induksjonsproblemet, ikke i Poppers skrifter.

© Morten Harboe Rognes 2019

kan være fornuftig å akseptere Einsteins generelle relativitetsteori gitt alt det vi vet i dag, altså relativt til e, mens det ikke behøver å være fornuftig å akseptere at denne teori holder relativt til all den evidens man har om hundre år, dvs. e'. Og dette kan logisk sett være tilfelle selvom all den evidens man har om hundre år inkluderer all den evidens vi har nå, ie. om e' Inkl e.

I denne forbindelse er det verdt å understreke at man ikke fra det at en påstand av typen Ba(x,y) holder og det at utsagnet y er sant kan slutte at utsagnet x er sant. At utsagnet y er sant innebærer ikke noe annet enn at den virkelige verden er med i sannhetsmengden til y. Men at Ba(x,y) holder innbærer bare at det blandt alle de verdener der y er sann finnes noen enkleste, og at utsagnet x er sant i alle disse. Men den virkelige verden kan være langt mer komplisert enn de enkleste verdenene i y og det er intet som tilsier at selvom sannhetsmengden til utsagnet x omfatter de enkleste verdenene i y må den også omfatte den virkelige verden.

Et annet forhold som det kan være verdt å merke seg er dette: Hvis det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til e, men ikke fornuftig å akseptere x relativt til e', der e' er den evidens man har ved et senere tidspunkt, og det dessuten er slik at e' impliserer e og det finnes utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til e', så kan man konkludere med at negasjonen av utsagn e' er et som bør aksepteres relativt til e. Man kan formulere dette som et teorem og gi et bevis for det innenfor rammen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Teoremet kan formuleres slik:

Teorem 5.5.1 Anta x,e og e er utsagn. Anta videre at
(i) Ba(x,e) & ¬Ba(x,e').
(ii) e' Inkl e & (Ez)Ba(z,e').
Gitt disse forutsetningene har man: Ba(Neg(e'), e)

Bevis: Fra forutsetning (i) og definisjonen av Ba kan man slutte (1) ø≠ Max(R,e) Inkl x. Fra den andre konjunkten i (i) kan man slutte: (2) ¬(ø≠ Max(R,e') & Max(R,e') Inkl x). Den andre konjunkten i forutsetning (ii) impliserer (3) ø ≠ Max(R,e'). Fra (2) og (3) følger: (4) ¬ (Max(R,e') Inkl x). Dette impliserer at det finnes det finnes en mulig verden w0 der w0êI og der vi har (5) w0êMax(R,e') & ¬(w0êx). Fra (5), definisjonen av Max og den første konjunkten i forutsetning (ii) kan man utlede: (6) w0êe. Men da kan vi ikke ha at w0êMax(R,e) for da ville vi i lys av (1) ha at w0êx som strider mot (5). Det følger at vi derfor må ha: (7) ¬(w0 ê Max(R,e)). Anta nå for reduktio at det fantes w' der
w'êMax(R,e') Ω Max(R,e). Siden w0êMax(R,e') følger da at Ekv;R(w'w0). Men fra dette det at w'êMax(R,e) og det at w0êe følger w0êMax(R,e) som strider mot (7). Derfor:
(8) Max(R,e')Ω Max(R,e) =ø
Det vi nå ønsker å vise er at (9) e'Ω Max(R,e) =ø. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes w1 der vi har w1êe' & w1êMax(R,e). Da har vi enten w1êMax(R,e'), men dette er umulig i lys av (8). Eller så har vi ¬w1êMax(R,e') og derfor w1ê (e' - Max(R,e')). Men da har vi i lys av (5) at w0R*w1. Men da kan ikke w1êMax(R,e) i lys av (7). Vi får altså en motsigelse i begge tilfelle. Det følger at (9) holder og derfor at Max(R,e) Inkl Neg(e'). Men dette, (1) og definisjonen av Ba impliserer Ba(Neg(e'),e). **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2019

§5.6 Ytterligere kommentarer til de sannsynlighetsteoretiske aksiomene

Hensikten med dette avsnittet er å avklare noe mer visse aspekter ved de sannsynlighets-teoretiske aksiomene som inngår i vår teori. Som man husker dreier det seg om aksiomene D1 - D8, F1 - F5, samt gruppen av aksiomer M1 - M3 som vi kalte for de multiplikative aksiomene. Som vi har nevnt tidligere inngår ikke enkelhetspredikatet i noen av aksiomene D1 - D8 og M1 -M3 når disse ekspanderes slik at de bare inneholder primitiv notasjon. Hvis man derfor begrenser språket til vår teori slik at det bare inneholder de mengdeteoretiske predikatene, predikatet "x er en mulig verden" samt det sannsynlighetspredikatet og dermed fjerner alle aksiomene som inneholder enkelhetspredikatet sitter man tilbake med aksiomene W1,W2 og D1 - D8 samt M1 - M3. Dette utgjør da en teori om den relative sannsynlighetsfunksjonen C. Det kan være hensiktsmessig å ha et navn på akkurat denne teorien . Vi skal kalle den for den begrensede teorien om relativ sannsynlighet. Vi skal kommentere visse trekk ved denne teorien før vi går videre.

For det første bør det bemerkes at denne teorien i en viss forstand er ganske svak. Ser man på aksiomene D1 - D8 og M1 - M3 ser man at de alle kan bringes på formen $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow \beta(x,y)$. Det følger derfor at dersom det ikke finnes utsagnspar $\langle x,y\rangle$ der x kan tilskrives en viss sannsynlighet relativt til y så vil alle aksiomene være (tomt) sanne. Dette innebærer at det er meget lett å vise at den begrensede teorien om sannsynlighet er konsistent relativt til ZFC;u(L;e) (og derfor til ZFC).

Det andre temaet vi ønsker å ta opp i forbindelse med denne begrensede teori om relativ sannsynlighet er dette. Vi ønsker å sammenligne den med en noe sterkere teori og si noen ord om denne. Denne sterkere teorien får vi når vi legger til de følgende to grunnsetninger som nye ikke-logiske aksiomer:

A1 $(Ey)(\langle y,I\rangle \hat{e} Dom(C))$
A2 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow \langle x,I\rangle,\langle y,I\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, C(y,I) > 0$

Den første av disse grunnsetningene sier at det finnes et utsagn som kan tilskrives en sannsynlighet relativt I, dvs. det nødvendig sanne utsagn. Det andre aksiomet uttrykker at et utsagn x kan tilskrives en sannsynlighet relativt til utsagnet y bare hvis utsagnene x og y kan tilskrives en sannsynlighet relativt til det nødvendig sanne utsagn og sannsynligheten til utsagnet y relativt til det nødvendig sanne utsagn er større enn 0. Begge disse setningene er alt annet enn opplagte og bør derfor betraktes med en sunn porsjon skepsis.

Imidlertid har denne teorien som består av aksiomene i den begrensede teorien om relativ sannsynlighet utvidet med A1 og A2 visse interessante konskvenser som vi finner det rimelig å gjøre oppmerksom på.

Anta $\langle I,\sigma,p\rangle$ er et sannsynlighetsrom over I[22]. Definer en funksjonen C ved:

(1) $C = Mg(\langle\langle x,y\rangle,r\rangle : r \hat{e} Reell \,\&\, x,y \hat{e} \sigma \,\&\, p(x\Omega y)/p(y) = r \,\&\, p(y) > 0)$

Definerer man C på denne måten kan man vise at C oppfyller alle aksiomene D1 - D8 og M1 - M3 samt A1 og A2 ovenfor. Vi skal imidlertid ikke gi noe detaljert bevis for dette her.[23]

22 Se §7 for presise definisjoner av hva som menes med en naturlig boolsk algebra og hva som menes med et sannsynlighetsrom $S = \langle X,\sigma,p\rangle$ over mengden X.

23 Detaljerte bevis for de påstandene vi nevner her finner man i Rognes [6], §19

© Morten Harboe Rognes 2019

Anta på den annen side at vi innenfor rammen av den begrensede teorien om sannsynlighet utvidet med A1 og A2 definerer σ;I og p;I på følgende måte:

(2.1) σ;I = Mg(x: xêU & <x, I>êDom(C))
(2.2) p;I = λ/xêU/(C(x,I))

Det man da kan vise er at <I,σ;I,p;I> er et sannsynlighetsrom over I. Definerer man nå videre C* ved hjelp av p;I og σ;I i analogi med (1) ,med andre ord ved:

(3) C*= Mg(<<x,y>,r>: rêReell & x,yêσ;I & p;I(xΩy)/p;I(y) =r & p;I(y)>0)

så kan man vise at C* = C. Hva alt dette innebærer er at man kan reaksiomatisere den begrensede teorien om relativ sannsynlighet utvidet med A1 og A2 på en ganske slående måte.

La oss bruke "SRom(s,X)" som forkortelse for "s er et sannsynlighetsrom over mengden X". Da har vi om SRom(s,X) at s=<X,σ,p> for en eller annen naturlig boolsk algebra σ over X og p er en eller annen sannsynlighetsfunksjon over σ.

Er q=<x;1,....,x;n> et n-tuple gjør vi oppmerksom på at (q);1 betegner den første komponenten i tuplet og at (q);j der 1=< j =< n betegner den j'te komponenten i tuplet. Alle disse begrepene kan defineres presist innenfor den rent mengdeteoretiske delen av den begrensede teorien om relativ sannsynlighet. Det man nå kan vise, men vi skal ikke gi beviset her, er at dersom man erstatter grunnsetningene D1 - D8, M1 - M3 og A1 og A2 med det følgende aksiom:

(4) (ES)(SRom(S,I) & C= Mg(<<x,y>,r>: rêReell & x,yê(S);2 &
(S);3(xΩy)/(S);3(y)= r & (S);(y) >0))

får man som resultat en teori som er helt ekvivalent med den begrensede teorien om relativ sannsynlighet utvidet med grunnsetningene A1 og A2.

Er x og y utsagn betegner C(x,y) sannsynligheten for det forhold utsagnet x beskriver gitt at y representerer all den evidens som er tilgjengelig. Kan man nå tillegge universelle vitenskapelige lover, eller systemer av slike lover, sannsynligheter relativt til for eksempel all den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt, eller relativt til all den evidens vi hadde for, la oss si, femti år siden? Det er, som vi allerede har nevnt, vanskelig å skjønne hvordan dette skal gjøres på en måte som ikke virker fullstendig vilkårlig eller grepet ut av løse luften om man holder seg til en teori som den begrensede teorien om relativ sannsynlighet, eller denne teorien utvidet med A1 og A2. Hvor stor sannsynlighet kan man for eksempel tilskrive Einsteins relativitetsteori relativt til konjunksjonen av alle de fysiske data som man er i besittelse av ved det nuværende tidspunkt? Er denne sannsynligheten veldig nær 1? Er den lik 1? Eller er den bare 0.9, eller kanskje bare litt over 0.45? Dette er naturligvis bare retoriske spørsmål, men hvordan skal man tross alt avgjøre dem? Man kan ikke helt fri seg fra den tanke at disse spørsmålene, og talløse andre, om de tas bokstavelig har et skjær av det litt latterlige over seg og at det er vanskelig å ta dem helt alvorlig.[24]

24 Det mest ambisiøse forsøk på å konstruere en generell relativ bekreftelsesfunksjon er fremsatt av Carnap i Carnap [1]. Carnap tar sitt utgangspunkt i et generelt predikatlogisk språk L med et endelig antall predikater

© Morten Harboe Rognes 2019

Vi har tidligere nevnt at en lang rekke lover og vitenskapelige teorier er av en slik art at det er fornuftig å akseptere dem relativt til den totale evidens vi har ved det nåværende tidspunkt. Hvis man derfor skulle tilskrive disse lovene og teoriene en sannsynlighet relativt til denne totale evidens virker det rimelig å tilskrive dem sannsynligheten 1. Et argument for dette er at dette ikke virker vilkårlig og og også tilsynelatende passer langt bedre med de forestillinger man har om sikkerheten og påliteligheten til vitenskapelige teorier. Dessuten virker det rimelig å anse at en teori som logisk sett er inkonsistent med den totale evidens vi har nå ha bør tilskrives en sannsynlighet lik 0 (relativt til denne evidens). Fra det at en teori som det er fornuftig å akseptere relativt til evidensen e har en sannsynlighet lik 1 relativt til e følger det selvfølgelig også at alle utsagn som logisk sett følger fra teorien også må tilskrives sannsynligheten 1 relativt til e. Det er imidlertid et forhold som man må gjøre oppmerksom på her. Det er bare om det finnes utsagn som kan tilskrives en viss sannsynlighet relativt til en evidensmengde e, ie. bare om e utgjør det vi kalte en sannsynlighetsbasis, at et utsagn x som det er fornuftig å aksepterere relativt til e også bør tilordnes sannsynligheten 1 relativt til e. Det er dette som uttrykkes av grunnsetningen F2:

F2 $(Ez)(<z,y>\hat{e}Dom(C)) \,\&\, Ba(x,y) \rightarrow C(x,y)=1$

Som vi nevnte ovenfor finner vi det vanskelig å tilskrive vitenskapelige teorier noe annet enn sannsynligheten 1 relativt til en viss evidens e, om det er fornuftig å akseptere dem relativt til e, og det er mulig å tilskrive utsagn en viss sannsynlighet relativt til e. Hvis man derfor tilskriver et utsagn x en viss sannsynlighet relativt til et utsagn y, må dette utsagnet y, som representerer den evidens som foreligger, inneholde eller rettferdigjøre visse statiske lovmessigheter som kan brukes til å tilskrive det fenomen som utsagnet x beskriver en bestemt sannsynlighet. Det er bare når man kjenner til, eller kan begrunne, slike statistiske

og en tellbart uendelig mengde med konstanter c;1,...,c;n,.... Språket L utvidet med de n første konstantene betegnes med L;n. Utvides det med alle konstantene betegnes det med L;inf. For hvert språk i rekken L;n defineres mengden av tilstandsbeskrivelsene over L;n. En tilstandsbeskrivelse i L;n assosiert med en mengde X av atomære setninger i L;n er konjunksjonen av alle setningene i X samt negasjonene av alle de atomære setningene i L;n som ikke er med i X. Vi betegner mengden av alle tilstandsbeskrivelser i L;n med T(L;n). Man kan nå innføre en uniform målfunksjon m over de diverse tilstandsbeskrivelsene T(L;n) og definere en generell relativ bekreftelsesfunksjon C:n ved C;n(a,b) = m(aΩb)/m(b) der a og b er to mengder med tilstandsbeskrivelser over L;n. Tillegger man elementene i T(L;n) den samme sannsynlighet får man da en relativ sannsynlighetsfunksjon som den beskrevet i Wittgenstein [1], §5.15 - §5.156. Carnap viser at denne er utilfredsstillende. (Se Carnap [1], side 564 -565) og ved hjelp av visse begreper som han innfører helt presist, *strukturbeskrivelser* og *isomorfe tilstandsbeskrivelser*, kan han definere en mer tilfredstillende målfunksjon m* og en på denne basert relativ sannsynlighetsfunksjon c* (Carnap [1], side 563, 564). Denne kan innføres for de diverse L;n, men også utstrekkes til L;inf. Imidlertid er det vanskelig å beregne c*(a,b) uten at man begrenser L slik at det bare inneholder monadiske predikater. (Se side 565 - 567). Dette representerer en sterk begrensing på språket L. (Man kan undres på om virkelig interessante vitenskapelige teorier kan formuleres i et så begrenset språk). Imidlertid viser Carnap også at generelle setninger av samme form som universelle lover, ie. setninger av typen (Ax)(Fx -> Gx) må tillegges sannsynligheten 0 selvom antallet bekreftende instanser øker. Man har, om man forkorter "Fx→Gx" med "M(x)":

Lim/n,0,inf/(c*((Ax)(M(x)), Konj/j,1,n/(M(c;j)))) =0.

(Se side 570 -571) Dette kan virke frustrerende siden man skulle tro at vitenskapelige lover i en eller annen forstand skulle anses som sikre, veletablerte og velbekreftede, og derfor ha en sannsynlighet større enn 0 om man har observert en lang rekke bekreftende instanser. Carnaps teori om induksjon synes derfor ikke å passe særlig bra sammen med den teorien om induksjon og sannsynlighet som presenteres her. Det bør også bemerkes at i det nevnte arbeid av Carnap spiller slike begreper som kausalnødvendighet, enkelhet, harmoni og indre konsistens ingen fremtredende rolle.

© Morten Harboe Rognes 2019

lovmessigheter at det gir noen klar mening å tilskrive hendelser (eller utsagn som beskriver hendelser) tallmessige mål på sannsynlighet.

La oss igjen se på et eksempel for å belyse dette. Jeg har for meg en vanlig kortstokk som er stokket meget grundig, trekker et kort fra denne kortstokken og med baksiden opp legger jeg det på bordet. Jeg har altså ikke sett hvilket kort det er. Dette er en del av det jeg vet ved det nuværende tidspunkt og sammen med alt det jeg forøvrig vet ved dette tidspunkt utgjør dette den evidens e jeg har nå. Relativt til e virker det da rimelig å hevde at sannsynligheten for at kortet er hjerter ess er lik 1/52. Betegner vi utsagnet at kortet er hjerter ess med x0 er det følgelig rimelig å påstå at C(x0,e)=1/52. Men jeg kan imidlertid bare påstå dette fordi det er fornuftig relativt til e å akseptere den generelle stokastiske regelmessighet at dersom man stokker en kortstokk skikkelig og trekker et kort fra den og gjentar denne prosedyren et meget stort antall ganger vil det bare være i tilnærmet 1/52' del av tilfellene at man trekker hjerter ess. La oss kalle denne stokastiske regelmessigheten for L;0. En forutsetning for at det skal gi mening å hevde at C(x0,e) er derfor at Ba(L;0,e). Fra dette siste følger selvfølgelig at (Ex)Ba(x,e).

I lys av en rekke eksempler av denne type synes det rimelig å hevde at (Ex)Ba(x,y) er en nødvendig betingelse for at utsagn har en viss sannsynlighet relativt til y. Det er dette grunnsetningen F1 uttrykker:

F1 $(Ez)(<z,y>\hat{e}Dom(C)) \rightarrow (Ex)Ba(x,y)$

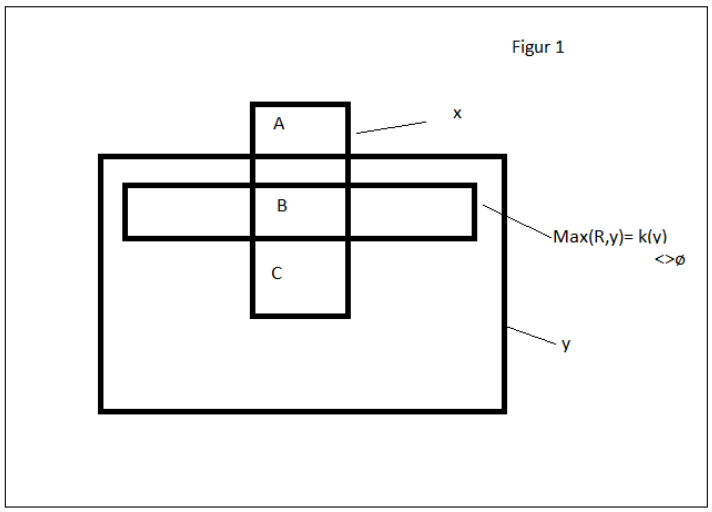
Etter at vi nå har kommentert grunnsetningene F1 og F2 er det rimelig å gjøre et forsøk på å motivere de resterende grunnsetningene F3 - F5. Siden det ikke er noe som tyder på at aksiomene F1 - F5 er avhengige av hverandre er det klart at det ikke er rimelig å tro at man kan bevise at F3 - F5 holder ved hjelp av F1 og F2. De betraktningene vi gør i det følgende må derfor oppfattes som fullstendig uformelle og av en nokså "løs" heuristisk natur.

La oss først se på F3. Anta $<x,y>\hat{e}Dom(C)$. Vi skal da forsøke å argumentere for at det er rimelig å hevde at $C(x,y) = C(x,\kappa(y))$ gitt at F1, F2 og de øvrige sannsynlighets-teoretiske grunnsetningene, spesielt D1 - D8, anses som rimelige. Fra det at $<x,y>\hat{e}Dom(C)$ følger ved hjelp av F1 at Ba(z,y) for et eller annet utsagn z. Men dette er som vi tidligere har sett ekvivalent med at $Max(R,y)\neq\emptyset$, med andre ord at $\kappa(y)\neq\emptyset$. Det finnes altså visse enkleste verdener blandt verdenene i y og mengden av dem alle er $\kappa(y)$.

La oss nå se på figuren nedenfor.

Punktene innenfor rektanglet y representerer mengden av alle de mulige verdenene der utsagnet y er sant. Tilsvarende representerer rektangelet x sannhetsmengden til utsagnet x. Rektangelet som er merket $\kappa(y)$ representerer de enkleste verdenene i mengden y. Som man ser fra figuren er A= x-y, B= $x\Omega\kappa(y)$ og C=$(x\Omega y) - \kappa(y)$. Siden $\kappa(y)$ Inkl y har vi at A,B og C er innbyrdes disjunkte. I lys av Kolmogoroffs tredje aksiom, med andre ord D8, skulle det da være rimelig å anta at $C(x,y) = C(A,y) + C(B,y) + C(D,y)$. Man ser raskt at det er rimelig å hevde at C(A,y) =0 siden det åpenbart er slik at Ba(Neg(A),y) og da må vi ha C(Neg(A),y)=1 (om vi forutsetter at $<z,y>\hat{e}Dom(C)$ for noe z). Men dette impliserer at C(A,y)=0. På tilsvarende vis kan man uformelt og ustringent argumentere for at C(C,y)=0. Man ser fra dette at (+) $C(x,y)= C(B,y) = C(x\Omega\kappa(y),y)$.

© Morten Harboe Rognes 2019



La oss nå anta at <x,κ(y)> êDom(C), med andre ord at utsagnet x kan tilskrives en sannsynlighet relativt til snittet av alle de utsagnene som bør aksepteres relativt til y. På samme måte som ovenfor har vi da:

C(x,κ(y)) = C(A,κ(y)) + C(B,κ(y)) + C(C,κ(y))

Gitt at κ(y) ≠ø ser man umiddelbart at C(A,κ(y)) =0 siden Ba(Neg(A),κ(y)) og derfor C(Neg(A),κ(y))=1. Tilsvarende kan man argumentere for at C(C,κ(y))=0. Det virker derfor ikke urimelig å konkludere med at

(++) C(x,κ(y)) = C(xΩκ(y),κ(y))

Fra intet av dette følger direkte at (+++) C(x,y) = C(x,κ(y)). Det eneste man kan konkludere med er at dette følger fra (+) og (++) om man antar:

C(xΩκ(y),y)=C(xΩκ(y),κ(y))

Imidlertid er dette ikke mer opplagt enn (+++), så noe stringent bevis for den sistnevnte påstand har ikke blitt gitt med overveielsene ovenfor. Men ser man på figuren virker det eiendommelig om man hevder at B skulle ha en annen sannsynlighet relativt til y enn til κ(y), ie. alt det som det er fornuftig å akseptere relativt til y, særlig når man forutsetter at alt det som bør aksepteres relativt til y har en sannsynlighet lik 1. Det er derfor naturlig å konkludere med at F3 er en ytterst rimelig påstand. Ser man på (+++) og (++) virker det rimelig, selvom disse påstandene bare holder med henholdsvis forbeholdene <x,κ(y)>êDom(C) og <x,y>êDom(C), og anta

F4 <x,κ(y)>êDom(C) → <x,y>êDom(C) og

F5 <xΩκ(y),y>êDom(C) → <x,y>êDom(C)

holder.

Det må igjen understrekes at vi ikke har gitt noe bevis for F3 - F5 ovenfor, men bare gjennomført noen tentative og uformelle betraktninger som kanskje kan overbevise leseren om at det å påstå at disse setningene er sanne ikke på noen måte er søkt. Vi påstår ikke å ha gjort noe mer enn dette.

© Morten Harboe Rognes 2019

DEL II

§6 Introduksjon

I denne delen av vårt arbeid skal vi se nærmere på de rent formelle sidene ved den begrensede teorien om akseptanse og sannsynlighet, men også ved den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Det kan være hensiktsmessig å repetere enkelte punkter fra §3. Man erindrer at L;e er språket for mengdelære og at Δ er den mengden med predikater som inneholder de tre predikatene "w er en logisk mulig verden", "w er en verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " og "z er den sannsynlighet som kan tilskrives utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens". L;e(Δ) er derfor språket til mengdelære utvidet med predikatene i Δ som nye ikke-logiske predikater. I dette språket formulerte vi fem grupper av aksiomer: for det første aksiomene om mulige verdener W1 og W2, for det andre grunnsetningene E1 - E3 om enkelhetsrelasjonen, for det tredje de grunnleggende aksiomene om sannsynlighet D1 - D8, for det fjerde aksiomene F1 - F5 som forbinder akseptanse og sannsynlighet, og endlig, for det femte, de multiplikative aksiomene M1 - M3 hvor det "viktigste" aksiomet i en viss forstand er det multiplikative aksiomet M3. Som man husker betegnet vi den formelmengden som inneholdt formlene W1,W2, E1 - E3, D1 - D8 og F1 - F5 med θ;1. Den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet har da bare disse aksiomene (i tillegg til de rent logiske og mengdeteoretiske aksiomene) som grunnsetninger. Den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet er derfor ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1]. Den sterke (eller fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet får vi når vi til aksiomene i ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1] legger til aksiomene M1 - M3, med andre ord har vi at denne teorien er ZFC;u(L;e(Δ))[θ;2] der θ;2= θ;1 U {M1,M2,M3}.

Vi definerte i §4 hva vi forstod ved en relativ sannsynlighetsstruktur. Man ser fra Definisjon 4.1 i §4 at dette er et rent mengdeteoretisk begrep. Dette innebærer at dersom S=<I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur kan I,R,og C være hva som helst så sant disse størrelsene bare oppfyller de krav som er nevnt Definisjon 4.1. Det er for eksempel intet i veien for at I i visse relative sannsynlighetsstrukturer kan være mengden av de reelle tall, en mengde av par av en eller annen type, eller noe annet som ikke har den minste likhet med mulige verdener. Siden dette begrepet er rent mengdeteoretisk og de øvrige begreper som vi innfører også er det kan alle satser vi utleder her oppfattes som teoremer i det mengdeteoretiske system som vi baserer oss på, nemlig systemet ZFC;u(L;e). Dette innebærer at alle de resultatene vi gir bevis for i denne andre hoveddelen av vårt arbeid logisk sett er helt uavhengige av sannhetsverdien til grunnsetningene W1, W2, E1 - E3, D1 - D8, F1 - F5 og M1 -M3. Sagt på en annen måte er disse resultatene begrunnet helt uavhengig av grunnsetningene i den sterke, såvel som den svake, teorien om akseptanse og sannsynlighet. Siden ingen av predikatene i Δ inngår i noen av de definisjonene vi gi i de følgende paragrafer (§7 - §12) er også de resultatene vi etterhvert skal presentere også helt uavhengige av spørsmålet om disse egentlig er meningsfulle eller ikke. På den annen side gir det knapt noen mening å studere så spesielle strukturer som relative sannsynlighetsstrukturer, eller relative sannsynlighetsstrukturer der alle utsagn som representerer en sannsynlighetsbasis er multiplikative, om man ikke hadde ansett den svake, så vel som den sterke, teorien om akseptanse og sannsynlighet som en ytterst rimelig, sann eller i det minste, interessant teori. Det er dette forhold, og bare dette forhold, som gjør at det å bevise de satsene vi skal formulere i de neste paragrafene gir

© Morten Harboe Rognes 2019

mening, og ikke bare er å oppfatte som en kuriøs øvelse i vitenskapens bakgård.

Det er av en viss interesse å gi en oversikt over innholdet i de følgende paragrafer. I §7 definerer vi to begreper som vi så langt ikke har hatt noe direkte behov for. For det første defineres hva som menes med en *naturlig boolsk algebra* over en ikke-tom mengde X. For det andre defineres hva som forstås med et sannsynlighetsrom over en mengde (ikke-tom) X. Begge definisjonene kan karakteriseres som standard-definisjoner.

I §8 definerer vi hva som menes med en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Dette er et triple <I,R,Π> der I er en ikke-tom mengde, R en preordning over I og Π er en funksjon som til visse delmengder av hvert R-nivå, ie. de diverse [w];R ettersom w gjennomløper mengden I, tilordner disse delmengdene sannsynlighetsrom. Er for eksempel x en delmengde av [w];R for en eller annen wêI, og er x med i domenet til Π vil Π(x) være et sannsynlighetsrom over mengden x.

I forbindelse med preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom S=<I,R,Π> definerer vi hva som menes med den relative sannsynlighetsfunksjonen C bestemt av S. Dette gjøres også i §8. I samme paragraf definerer vi også (se Definisjon 8.3), gitt at S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assoierte sannslighetsrom, hva som menes med at Π(x), der x er med i domenet til Π, er *multiplikativt*.

Er S=<I,R,Π> en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og er C den relative sannsynlighetsfunksjonen bestemt av S kaller vi S'=<I,R,C> for den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. I §9 viser vi detaljert at S' faktisk er en relativ sannsynlighetsstruktur.[25]

I §10 går vi den motsatte vei. Vi starter med en relativ sannsynlighetsstruktur S=<I,R,C> og viser hvordan man gitt S kan definere en funksjon Π slik at S'=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. I §11 beviser vi så alle de resultatene som ble oppsummert i siste del av §1 og tilslutt viser vi i §12 hvordan man kan bruke de resultatene vi har vist til å formulere en alternativ aksiomatisering av den svake (begrensede) teorien om akseptanse og sannsynlighet og en alternativ aksiomatisering av den sterke (fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet.

§7 Noen grunnleggende begreper hentet fra sannsynlighetsteorien.

Det er et par grunnleggende begreper som må defineres og avklares før vi kan gi en presis definisjon av hva som menes med en preferansestruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Det første begrepet er begrepet *naturlig boolsk algebra* over en mengde X. En naturlig boolsk algebra over en mengde X er en mengde σ av delmengder av X som for det første inneholder X selv, for det andre er lukket under komplement med hensyn på X og som for det tredje er lukket under endelig union. Det kreves at X er ikke-tom. Formelt sett kan definisjonen formuleres slik:

25 Et viktig poeng med dette resultatet er at det er forholdsvis lett å konkret spesifisere preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Dermed er det lett å konstruere relative sannsynlighetsstrukturer. Dette i sin tur impliserer at det er forholdsvis enkelt å vise at ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1] er konsistent relativt til ZFC:u(L;e).

© Morten Harboe Rognes 2019

Definisjon 7.1 σ er en *naturlig boolsk algebra* over mengden X hvis og bare hvis σ oppfyller de følgende krav:

(i) σ Inkl Pt(X) & X≠ø
(ii) Xêσ
(iii) xêσ → (X-x)êσ
(iv) x,yêσ → (xUy)êσ

Det følger fra denne definisjonen at dersom σ er en naturlig boolsk algebra over X så er σ lukket under alle de vanlige boolske operasjonen, ikke bare union og komplement, men også slike operasjoner som endelig snitt, hva man kunne kalle kondisjonal over X, ie operasjonen som tilordner to mengder x,y mengden (X-x)Uy og bikondisjonal, det vil si operasjonen som tilordner to mengder x,y mengden ((X-x)Uy)Ω((X-y)Ux). Det følger også fra denne definisjonen at øêσ om σ er en naturlig boolsk algebra over X. Fra (ii) og (iii) i definisjonen har man (X-X)êσ. Men ø=X-X og derfor følger øêσ. Det bør også bemerkes at om X er en endelig mengde så er mengden av alle delmengder av X en naturlig boolsk algebra.

Det neste begrepet vi innfører er begrepet *sannsynlighetsrom*. Et sannsynlighetsrom er et trippel der den første komponenten er en ikke-tom mengde X, den andre komponenten er det vi ovenfor kalte en naturlig boolsk algebra over X og den tredje komponenten, kalt sannsynlighetsfunksjonen er en funksjon med de følgende egenskaper: Domenet til funksjonen er alle mengdene i den naturlige boolske algebraen og verdiområdet til funksjonen er inkludert i intervallet [0,1]. Dessuten skal denne funksjonen oppfylle det krav at den tilordner X verdien 1 og dersom x,y er disjunkte mengder i den algebraen som inngår så skal verdien som funksjonen tilordner unionen av x og y være identisk med summen av den verdien funksjonen tilordner x og den verdien funksjonen tilordner y. Denne definisjonen kan formuleres mer formelt slik:

Definisjon 7.2 Med et sannsynlighetsrom over mengden X forstår vi et trippel <X,σ,p> der de enkelte komponentene oppfyller følgende krav:

(i) X er en ikke-tom mengde.
(ii) σ er en naturlig boolsk algebra over X
(iii) p er en funksjon som oppfyller de følgende krav:
  (a) Dom(p) = σ
  (b) Rgn(p) Inkl [0,1]
  (c) p(X) =1
  (d) x,yêσ & xΩy=ø → p(xUy) = p(x)+p(y)

Det kan være hensiktsmessig å gi et eksempel. La X være en endelig mengde av n elementer. (n>=1). La σ være alle endelige delmengder av X inkludert X selv og nullmengden. Anta at X= {a;1, ... ,a;n}. Da ser man lett at σ er en naturlig boolsk algebra over X. La videre <p;i>/1=<i=<n/ være en sekvens av n reelle tall der p;i >=0. Sum/i,1,n/(p;i) er summen av disse n reelle tallene. Vi krever at denne skal være større enn 0. Definer nå en funksjon q ved å sette at q = Mg(<a;i, p;i/Sum/i,1,n/(p;i)>: 1=<i =<n). Definer til slutt om aêσ p(a) ved å sette at p(a)= Sum/xêa/(q(x)). Man ser da ganske lett at <X,σ,p> er et sannsynlighetsrom i den betydningen som er innført ovenfor.

© Morten Harboe Rognes 2019

Anta a er et n-tuple, med andre ord at a=<x;1, ... ,x;n> for noe n>=1. Da betegner [a];j den j'te komponenten i dette n-tuplet. Vi har altså at [a];j=x;j. Tilsvarende har vi [a];1=x;1, [a];2=x;2 osv. Er derfor S= <X,σ,p> et sannsynlighetsrom har vi [S];1=X, [S];2=σ og [S];3=p. Selvfølgelig har vi også om S=<X,σ,p> at

<X,σ,p> = <[S];1,[S];2,[S];3>

Det er viktig at leseren legger merke til dette fordi vi vil bruke denne notasjonen svært mye i det følgende.

Med en preordning R over mengden X forstår vi en relasjon som er inkludert i XxX og som er refleksiv og transitiv. Dette innebærer at R må oppfylle de følgende to krav:

(i) $(Ax)(x\hat{e}X \rightarrow R(x,x))$

(iii) $R(x,y) \,\&\, R(y,z) \rightarrow R(x,z)$

Vi gir den følgende definisjon av begrepet preordningsstruktur:

Definisjon 7.3 Med en preordningsstruktur forstår vi et hvilket som helst ordnet par <I,R> der I er en ikke-tom mengde og R er en preordning over I

Er R en preordning over mengden X og er x en delmengde av X er de R-maksimale elementene i x, i symboler Max(R,x), definert slik:

Definisjon 7.4 Anta <I,R> er en preordningsstruktur og xêPt(I). Da setter vi:

$Max(R,x) = Mg(y: y\hat{e}x \,\&\, (Az)(z\hat{e}x \rightarrow R(y,z)))$

Er <I,R> en preordningsstruktur definerer vi R*, den strenge preordningen bestemt av R, og Ekv;R, ekvivalensrelasjonen bestemt av R på følgende vis:

Definisjon 7.5

(a) $R^*=Mg(\langle x,y\rangle: x,y\hat{e}I \,\&\, R(x,y) \,\&\, \neg R(y,x))$

(b) $Ekv;R = Mg(\langle x,y\rangle: x,y\hat{e}I \,\&\, R(x,y) \,\&\, R(y,x))$

Det er meget lett å vise at dersom <I,R> er en preordningsstruktur så er Ekv;R en ekvivalensrelasjon over I. Dette innebærer at Ekv;R inndeler I i en mengde av innbyrdes disjunkte og ikke-tomme ekvivalensmengder som samlet uttømmer I. Er wêI betegner [w];R mengden av alle de elementene i I som er R-ekvivalende med w, det vil si mengden av de elementene w'êI der vi har Ekv;R(w',w). Vi kan gi en mer formell definisjon slik:

Definisjon 7.6 Er <I,R> en preordningsstruktur setter vi om wêI:

$[w];R = Mg(z: z\hat{e}I \,\&\, Ekv;R(z,w))$

Vi definerer akseptanserelasjonen Ba bestemt av en preordningsstruktur <I,R> på samme måte som tidligere:

Definisjon 7.7 Er <I,R> en preordningsstruktur setter vi:

$Ba(x,y) \leftrightarrow (x,y\hat{e}Pt(I) \,\&\, \emptyset \neq Max(R,y)\ Inkl\ x)$

© Morten Harboe Rognes 2019

Man ser fra definisjonen ovenfor at uttrykket "Ba(x,y)" egentlig bare gir mening om man referer til en bestemt preordningsstruktur. Men hvilken preordningsstruktur vi forutsetter vil fremgå av konteksten og relasjonen Ba vil derfor være bestemt entydig. Vi skal også bruke uttrykket "κ(x)" som forkortelse for det lengere uttrykket "Max(R,x)". Her er det også slik at vi i notasjonen undertrykker preordningsrelasjonen R. Men er det i en sats vi formulerer forutsatt at det bare er én preordnings-struktur som er involvert skulle det være klart at κ(x) referer til de R-maksimale elementene til mengden x og at R er preordningen i denne preordningsstrukturen.

§8 Definisjon av preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom.

Vi kommer nå til et av de viktigste begrepene i dette essay nemlig det vi kaller preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Det er definert slik:

Definisjon 8.1 Vi kaller et trippel <I,R,Π> for en *preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom* hvis og bare hvis de enkelte komponentene i dette trippel oppfyller de følgende krav:

(a) I er en ikke-tom mengde og R en preferanserelasjon over I
(b) Π er en funksjon
(c) Dom(Π) Inkl UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI)
(d) For ethvert xêDom(Π) er Π(x) et sannsynlighetsrom over x

I forbindelse med denne definisjonen bemerker vi først at om <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom så er <I,R> en preordningsstruktur. Dette innebærer at ekvivalensrelasjonen Ekv;R over I inndeler I i en mengde av ikke-tomme, innbyrdes disjunkte, ekvivalensmengder som samlet uttømmer I. Ekvivalensmengden bestemt av verdenen w, ie [w];R vil da utgjøre en av alle disse ekvivalensmengdene. Vi skal kalle disse ekvivalensmengdene som bestemmes av relasjonen R for enkelhetsnivåene. Det følger at [w];R, om wêI, utgjør et slikt enkelhetsnivå. Pt([w];R) utgjør da mengden av alle delmengder av dette nivå og Pt([w];R) - {ø} utgjør da mengden av alle de ikke-tomme delmengdene av [w];R. Man legger merke til at dersom w1 og w2 er to ikke-ekvivalente elementer i I så har man at (Pt([w1];R) - {ø}) og (Pt([w2];R) - {ø}) er disjunkte. UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI) er derfor unionen av de diverse mengdefamiliene Pt([w];R) - {ø} ettersom w gjennomløper I. Som man ser krever vi at domenet til funksjonen Π skal være inkludert i denne unionen. Dette kan være identisk med denne foreningsmengden, men behøver ikke å være det.

Vi innfører nå den relative sannsynlighetsfunksjonen C ved den følgende definisjon. Merk at om <I,R,C> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom er U definert som Pt(I). Vi kaller de diverse elementene i U for utsagnene i strukturen.

Definisjon 8.2 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da definerer vi den relative sannsynlighetsfunksjonen C bestemt av S på følgende vis.

© Morten Harboe Rognes 2019

C= Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Før vi går videre med den neste definisjonen, som definerer hva som menes menes med at sannsynlighetsrommet Π(y), der y êDom(Π) , er multiplikativt finner vi det hensiktsmessig å gi bevis for det følgende teorem som bidrar til å klargjøre og kaste lys over den definisjonen vi skal gi. Satsen er denne:

Teorem 8.1 Anta S=<X,σ,p> er et sannsynlighetsrom over X. Anta aêσ og at p(a)>0. Definer σ;a og p;a ved:

(i) σ;a= Mg(xΩa: xêσ)

(ii) p;a = Mg(<z,p(z)/p(a)>: zêσ;a)

Da har man at følgende holder:

(a) <a,σ;a,p;a> er et sannsynlighetsrom over a

(b) (Az)(zêσ;a → p(z) = p(a)* p;a(z))

(c) (Az)(zêσ → (zΩa)êσ;a)

(d) σ;a Inkl σ

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.
Ad (a): Vi viser først at σ;a er en naturlig boolsk algebra over a. Siden aêσ har vi ved hjelp av forutsetning (i) at (1) aêσ;a. Det er også lett å se at
(2) (Az)(zêσ;a → zêPt(a)) For er zêσ;a har vi at det finnes x der z=xΩa & xêσ. Da har vi åpenbart at z Inkl a. Men dette impliserer zêPt(a). Dette viser at (2) holder. Vi må også vise at (3) (Az)(Av)(z,vêσ;a → (zUv)êσ;a). Anta derfor for vilkårlige z,v at (4) z,vêσ;a. Fra dette og forutsetninng (i) følger at det finnes x1 og x2 slik at

(5.1) z=x1Ωa & x1êσ

(5.2) v=x2Ωa & x2êσ

Fra disse to setningene følger (6) zUv = (x1Ux2)Ωa. Videre har vi siden x1,x2êσ at (x1Ux2)êσ. Men a er ifølge forutsetningene et element i σ. Det følger siden σ er en naturlig boolsk algebra at (7) (x1Ux2)Ωa êσ. Fra (6), (7) og definisjonen av σ;a følger at (zUv)êσ;a. Dette viser at (3) holder.

Vi må også vise:

(8) xêσ;a → (a-x)êσ;a

Anta derfor for vilkårlig x at (9) xêσ;a. Da finnes x1 slik at (9.1) x=x1Ωa & x1êσ. Siden σ er en naturlig boolsk algebra over X har vi at aêσ og x1êσ og derfor i lys av (9.1) at x=x1Ωaêσ, siden σ er lukket under endelige boolske operasjoner. Det følger videre at Xêσ siden σ er en naturlig boolsk algebra over X. Vi har derfor at

(10) a-x = a - (x1Ωa)
= aΩ (X - (x1Ωa))
= aΩ((X-x1)U(X-a))
= (aΩ(X-x1))U(aΩ(X-a))
= (aΩ(X-x1))Uø
= aΩ(X-x1)

Siden Xêσ og x1êσ har vi at (X-x1)êσ. Fra dette og (10) følger i lys av forutsetning (i) at (a-x)êσ;a . Dette viser at (8) holder.

© Morten Harboe Rognes 2019

Fra (1), (2), (3) og (8) følger det at σ;a er en naturlig boolsk algebra over a.
Vi må imidlertid også vise at p;a som definert ved (ii) i satsen er en sannsynlighetsfunksjon over σ. Vi viser først at p;a er en funksjon: Anta (11) <z,r1>,<z,r2> ê p;a. Da har vi at det finnes x1,x2êσ;a slik at (12) z=x1 & r=p(x1)/p(a) og (13) z=x2 & r2=p(x2)/p(a). Fra (12) og (13) følger åpenbart at x1=x2 og derfor at r1=r2. Dette viser at p;a er en funksjon.

Fra forutsetning (ii) har vi, om <x,r>êp;a, at x=z & r = p(z)/p(a) for noe zêσ;a. Det følger at xêσ;a. Fra dette kan man slutte (14) Dom(p;a) Inkl σ;a. Anta på den annen side at zêσ;a. Siden p(a)>0 har vi at det finnes r slik at (15) r=(p(z)/p(a)) fordi zêσ;a Inkl σ. Det følger da ved hjelp av forutsetning (ii) at <z,r>êp;a. Dette viser at σ;a Inkl Dom(p;a). Vi har dermed vist at (16) Dom(p;a) = σ;a.

Vi må vise at Rgn(p;a) Inkl [0,1]. Anta derfor at <z,r>êp;a for noe zêσ;a. Det følger da ved hjelp av forutsetning (ii) at r= (p(x)/p(a)). Fra forutsetningene i satsen har vi p(a)>0. Siden xêσ;a ser man lett at xêσ i lys av forutsetning (i). Vi må også ha at x=zΩa for noe zêσ. Nå har man siden p er en sannsynlighetsfunksjon over σ at p(zΩa) =< p(a). Fra dette, og det at p(a)>0 ifølge forutsetningene, følger 0=< r=(p(x)/p(a)) =<1. Det viser at verdiområdet til funksjonen p;a er inkludert i [0,1].

Vi må vise at p;a oppfyller kravet (d) i Definisjon 7.2. Anta derfor at

(17) x1,x2êσ;a & x1Ωx2=ø.

Da har vi for noe y1 at (18) x1=y1Ωa & y1êσ. Tilsvarende må vi ha for noe y2 at
(19) x2=y2Ωa & y2êσ. Det følger at

(20) x1Ux2= (y1Ωa)U (y2Ωa) og derfor

(21) x1Ux2= (y1Uy2)Ωa der y1Uy2êσ

Siden x1,x2êσ;a og σ;a er domenet til sannsynlighetsfunksjonen p;a har vi i lys av (18) og (19):

(22) p;a(x1) = p;a(y1Ωa) = p(y1Ωa)/p(a)

(23) p;a(x2) = p;a(y2Ωa) = p(y2Ωa)/p(a)

(24) p;a(x1Ux2) = p;a((y1Ωa)U(y2Ωa)) = p((y1Ωa)U(y2Ωa))/p(a)

Nå har vi fra (17) at x1Ωx2=ø. Fra dette og (18) og (19) følger: (y1Ωa)Ω(y2Ωa)=ø. Men y1Ωa ê σ og y2Ωa êσ. Siden <X,σ,p> er et sannsynlighetsrom kan vi derfor slutte at

(25) p((y1Ωa)U(y2Ωa)) = p(y1Ωa)+ p(y2Ωa)

Men fra dette og (22) - (24) følger p;a(x1Ux2) = p;a(x1)+ p;a(x2).

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at <a,σ;a,p;a> er et sannsynlighetsrom.
A*d (b)*: Anta zêσ;a. Da har vi zêDom(p;a) og derfor for noe r at <z,r>êp;a. Men fra dette og definisjonen av p;a følger p;a(z)= p(z)/p(a). Siden p(a)>0 følger fra dette p(z)=p(a)*p;a(z). Dette viser at punkt (b) holder.
Ad (c): Anta zêσ. Da følger umiddelbar fra forutsetning (i) at zΩaêσ;a
Ad (d): Anta zêσ;a da finnes det noe x slik at z=xΩa og xêσ. Men a er per forutsetning med i σ. Siden σ er lukket under snitt følger at z=xΩaêσ. Vi har derfor σ;a Inkl σ

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Anta nå at <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Anta y er er et utsagn som er med i domenet til Π. Vi har da at Π(y) er et sannsynlighetsrom. Vi skal nå definere hva som menes med at dette sannsynlighetsrommet er multiplikativt i denne strukturen. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.3 Anta <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom

© Morten Harboe Rognes 2019

og at αêDom(Π). Da kaller vi Π(α) for *multiplikativt* hvis og bare hvis vi har for ethvert xêU at dersom xê[Π(α)];2 & [Π(α)];3(x)>0 så gjelder følgende:

(a) xêDom(Π)

(b) (Az)(zê[Π(x)];2 → [Π(α)];3(z) = [Π(α)];3(x) * [Π(x)];3(z))

(c) (Ay)(yê[Π(α)];2 →yΩxê[Π(x)];2)

(d) [Π(x)];2 Inkl [Π(α)];2

Man ser lett at kravene (a) - (d) i denne definisjonen svarer helt til punktene (a) - (d) i Teorem 8.1.

§9 Kanoniske relative sannsynlighetsstrukturer

Vi har i §4 gitt en definisjon av hva vi forstår med *en relativ sannsynlighetsstruktur*. Definisjon 4.1 er en definisjon av dette begrep. Vi har nå også definert den andre strukturtypen som vi vil beskjeftige oss med i denne delen av vårt arbeid, nemlig det vi ovenfor kalte *preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom*. Det vi nå vil gjøre er å studere sammenhengene mellom disse to typene av strukturer. Vi skal først definere hva vi forstår med *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen* bestemt av en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 9.1 Anta S= <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da kaller vi strukturen S' =<I,R,C> hvor funksjonen C er definert som ovenfor, det vil si som i Definisjon 8.2, for *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S*

Det er to kommentarer som det er naturlig å fremsette i forbindelse med denne definisjonen. For det første er det slik at dersom S =<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom så er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S entydig bestemt. For det andre kan man ikke fra definisjonen ovenfor slutte at dersom S' er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S så er S' faktisk en relativ sannsynlighetsstruktur. Dette er noe som må bevises. Man må verifisere at S' oppfyller alle de kravene vi stilte til en relativ sannsynlighetsstruktur i Definisjon 4.1. Det er nøyaktig dette vi vil gjøre i denne paragrafen.

Anta nå at S' = <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom <I,R,Π>. Vi skal da først vise at C er en funksjon, at domenet til C er inkludert i Pt(I)xPt(I), ie. UxU og at verdiområdet til C er inkludert i intervallet [0,1]. Det skulle forøvrig fra Definisjon 9.1 umiddelbart fremgå at I er en ikke-tom mengde og at R er en preordning over I. Dernest vil vi vise at C'en i S' oppfyller kravene D3 - D4. Endelig vises det at C også oppfyller kravene F1 - F5. Vi skal gjøre dette skrittvis i den rekke følge som er nevnt her. Tilslutt skal vi også vise at dersom <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sansynlighetsrom og vi har at yêPt(I) Og κ(y)êDom(Π) og Π(κ(y)) er multiplikativt så oppfyller y kravene M1 - M3 som vi nevnte mot slutten av §4.

© Morten Harboe Rognes 2019

Teorem 9.1 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man:

(a) I er en ikke-tom mengde og R er en preordning over I
(b) C er en funksjon
(c) Dom(C) Inkl Pt(I)xPt(I)
(d) Rgn(C) Inkl [0,1]

Bevis: *Ad (a)*: Siden S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom følger det direkte fra definisjonen at I er en ikke-tom mengde og R en preordning over I.

Ad(b): Anta (1) <z,r1>, <z,r2>êC. For å vise at C er en funksjon vil det da være nok å vise at r1=r2. Fra (1) følger det da at det finnes x,y,r og x',y',r' slik at

(2.1) <z,r1>=<<x,y>,r> & x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r
(2.2) <z,r2>= <<x',y'>,r'> & x',y'êU & ø≠κ(y')êDom(Π) &
x'Ωκ(y')ê[Π(κ(y'))];2 &[Π(κ(y'))];3(x'Ωκ(y'))=r'

Fra de første konjunktene i (2.1) og (2.2) følger åpenbart at (3) <x,y>=z=<x',y'> og at (4) r1=r & r2=r'. Fra (3) følger (4.1) x=x' & y=y'. Fra dette og de siste konjunktene i (2.1) og (2.2) r = [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r'. Men fra dette og (4) har vi r1=r2. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta <z,r1>êC for noe r1. Ved hjelp av definisjonen av C, Definisjon 8.2, følger da eksistensen av x,y, r der man har:

(1) z=<x,y> & r1=r
(2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Fra dette følger z=<x,y> & x,yêU. Men herav har vi at zêUxU = Pt(I)xPt(I).

Ad (d): Anta r1êRgn(C) for vilkårlig r1. Da følger per definisjon av Rgn at <z,r1>êC for noe z. Ved hjelp av definisjonen av C, Definisjon 8.2, følger da eksistensen av x,y, r der man har:

(1) z=<x,y> & r1=r
(2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Siden <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom har vi at [Π(κ(y))];3 er en sannsynlighetsfunksjon over den naturlige boolske algebraen [Π(κ(y))];2. Det følger fra dette og (2) at [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=rê[0,1]. Men r1=r ifølge (1). Fra dette kan man slutte det vi ønsker, nemlig at r1ê[0,1]. **QED**.

Teorem 9.2 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man:

(a) <x,y>êDom(C) → <Neg(x),y>êDom(C)
(b) <x1,y>, <x2,y>êDom(C) → <x1 U x2, y>êDom(C)
(c) <x,y>êDom(C) → <y,y>êDom(C)

© Morten Harboe Rognes 2019

(d) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(I,y) = 1$

(e) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(x\Omega y, y) = C(x,y)$

(f) $\langle x1,y\rangle,\langle x2,y\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, x1 \,\Omega\, x2 = \emptyset. \rightarrow C(x1 \,U\, x2,y) = C(x1,y)+C(x2,y)$

Man gjenkjenner aksiomene D3 - D8 i punktene (a) - (f)

Bevis: A*d (a)*: Anta $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Da har vi ved hjelp av definisjonen av C at det må finnes r der:

(1) $x,y \hat{e} U \,\&\, \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$

(2) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

(3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

Nå har vi siden $\langle I,R,\Pi\rangle$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom at $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom over $\kappa(y)$. Da har vi at $[\Pi(\kappa(y))];2$ er en naturlig boolsk algebra over $\kappa(y)$. Fra dette og (2) følger:

(4) $\kappa(y)\text{-}(x\Omega\kappa(y)) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

Nå har man

(5.1) $w \hat{e} \kappa(y)\text{-}(x\Omega\kappa(y)) \leftrightarrow . w \hat{e} \kappa(y) \,\&\, \neg(w \hat{e} (x\Omega\kappa(y)))$
$\leftrightarrow w \hat{e} \kappa(y) \,\&\, (w \hat{e} \kappa(y) \rightarrow \neg(w \hat{e} x))$
$\leftrightarrow w \hat{e} I \,\&\, w \hat{e} \kappa(y) \,\&\, \neg(w \hat{e} x)$
$\leftrightarrow w \hat{e} ((I\text{-}x)\Omega\kappa(y))$.

Det følger at $\kappa(y)\text{-}(x\Omega\kappa(y)) = (I\text{-}x)\Omega\kappa(y)$ og derfor ved hjelp av (4) at
(6) $(I\text{-}x)\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$. Siden $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom har vi i lys av (6) at $[\Pi(\kappa(y))];3((I\text{-}x)\Omega\kappa(y)) = r'$ for noe r'. Fra dette, (6) og definisjonen av C følger, siden $Neg(x) = I\text{-}x$ at $\langle Neg(x),y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): (1) $\langle x1,y\rangle, \langle x2,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Da har vi ved hjelp av definisjonen av C at følgende holder for visse r1 og r2:

(1.1) $x1,x2,y \hat{e} U \,\&\, \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$

(1.2) $x1\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2 \,\&\, [\Pi(\kappa(y))];3(x1\Omega\kappa(y)) = r1$

(1.3) $x2\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2 \,\&\, [\Pi(\kappa(y))];3(x2\Omega\kappa(y)) = r2$

Siden $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom over $\kappa(y)$ følger at $[\Pi(\kappa(y))];2$ er en naturlig boolsk algebra over $\kappa(y)$. Vi kan derfor fra første konjunkt i (1.2) og den første konjunkten i (1.3) slutte at:

(2) $(x1\Omega\kappa(y))U(x1\Omega\kappa(y)) = (x1Ux2)\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

Siden Siden $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom har vi i lys av (2) at
$[\Pi(\kappa(y))];3((x1Ux2)\Omega\kappa(y)) = r'$ for noe r'.
Fra dette, (2), (1.1) og definisjonen av C kan man slutte at $\langle x1Ux2,y\rangle \hat{e} Dom(C)$.

Ad (c): Anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Da har vi som i tidligere tilfelle at det finnes r der:

(2.1) $x,y \hat{e} U \,\&\, \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$

(2.2) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

Nå har man, noe man lett skulle innse på basis av definisjonen av $\kappa(y)$, at $\kappa(y)$ Inkl y og derfor at (3) $y\Omega\kappa(y) = \kappa(y)$. Det er åpenbart, siden $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom, at $\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$. I lys av (3) følger da (4) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

© Morten Harboe Rognes 2019

Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom følger også at

(5) [Π(κ(y))];3(yΩκ(y)) = [Π(κ(y))];3(κ(y)) =1

Fra (2.1), (4), (5) og definisjonen av C følger da <y,y>êDom(C). Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d): Anta (1) <x,y>êDom(C). Da har vi som i tidligere tilfelle at det finnes r der:

(2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)

Nå har man, noe man lett skulle innse på basis av definisjonen av κ(y), at κ(y) Inkl I og derfor at (3) IΩκ(y)=κ(y). Det er åpenbart siden det følger fra (1) at Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom at κ(y)ê[Π(κ(y))];2. I lys av (3) følger da (4) IΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2

Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom følger også at

(5) [Π(κ(y))];3(IΩκ(y)) = [Π(κ(y))];3(κ(y)) =1

Fra (2), (4), (5) og definisjonen av C følger da C(I,y)=1. Dette viser at punkt (d) holder.

Ad (e): Anta (1) <x,y>êDom(C). Ved hjelp av definisjonen av C følger da:

(2.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)

(2.2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2

(2.3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

for noe rêReell. Siden κ(y) Inkl y har vi yΩκ(y)=κ(y). Fra dette og (2.1) -(2.3) følger:

(3) xΩyΩκ(y)=xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 og

(4) [Π(κ(y))];3(xΩyΩκ(y))=r

Fra (2.1) - (2.3) har man (5) C(x,y)=r. Fra (3), (4), (2.1) og definisjonen av C slutte:

C(xΩy,y)=r. Fra (5) og (6) følger C(xΩy,y)=C(x,y). Dette viser at punkt (e) holder.

Ad (f): Anta (1) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & x1Ωx2=ø

Ved hjelp av definisjonen av C følger da:

(2.1) x1,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)

(2.2) x1Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2

(2.3) [Π(κ(y))];3(x1Ωκ(y))=r1

og

(3.1) x2,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)

(3.2) x2Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2

(3.3) [Π(κ(y))];3(x2Ωκ(y))=r2

for noen reelle tall r1 og r2. Fra den siste konjunkten i (1) følger

(4) (x1Ωκ(y))Ω(x2Ωκ(y)) =ø

Videre følger fra (2.2) og (3.2) siden [Π(κ(y))];2 er en naturlig boolsk algebra at

(5) (x1Ωκ(y))U(x2Ωκ(y)) ê [Π(κ(y))];2

Videre har vi fra (4) og (5) sammen med (2.3) og (3.3), siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom, at:

(6) [Π(κ(y))];3((x1Ωκ(y))U(x2Ωκ(y)))=r1+r2

Fra (2.1) - (2.3), (3.1)-(3.3), (5),(6) og definisjonen av C følger så det vi ønsker:

C(x1Ux2,y) = C(x1,y)+c(x2,y)

Dette viser at punkt (f) holder. **QED**.

Teorem 9.3 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man:

© Morten Harboe Rognes 2019

(a) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow (Ez)Ba(z,y)$
(b) $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C)). \rightarrow (Ba(x,y) \rightarrow C(x,y)=1)$
(c) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(x,y) = C(x,\kappa(y))$
(d) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \rightarrow \langle \kappa(y),y\rangle \hat{e}\ Dom(C)$
(e) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \rightarrow C(\kappa(y),y)=1$
(f) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow \langle x\Omega\ \kappa(y), \kappa(y)\rangle \hat{e}\ Dom(C)$
(g) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow \langle x,\kappa(y)\rangle \hat{e}\ Dom(C)$
(h) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow \langle x\Omega\kappa(y),y\rangle \hat{e}\ Dom(C)$

Man man ser at (a) - (c) her er aksiomene F1 - F3. Aksiomet F4 er halvdelen mot venstre i punkt (g) og kondisjonalen mot venstre i punkt (h) er aksiomet F5.

Bevis: *Ad (a)*: Anta $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra definisjonen av C følger da:

(1.1) $x,y \hat{e} U\ \&\ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(1.2) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(1.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r$

Fra (1.1) har man $\emptyset \neq \kappa(y)$. Men $\kappa(y)$ Inkl $\kappa(y)$. Derfor $\emptyset \neq \kappa(y)$ Inkl $\kappa(y)$. Herav følger ved hjelp av definisjonen av Ba at $Ba(\kappa(y),y)$. Herav $(Ez)Ba(z,y)$. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta (1) $\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C)\ \&\ Ba(x,y)$. Fra den første konjunkten har vi da ved hjelp av definisjonen av C at følgende holder for noe r:

(2.1) $z,y \hat{e} U\ \&\ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(2.2) $z\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(z\Omega\kappa(y))=r$

Fra den andre konjunkten i (1) og definisjonen av Ba følger (3) $x \hat{e} U\ \&\ \emptyset \neq \kappa(y)$ Inkl x. Fra dette kan man slutte at (4) $\kappa(y) = x\Omega\kappa(y)$. Nå har man fra (2.1) at $\kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$ og derfor at $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom $\kappa(y)$. Det følger da at

(4.1) $\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(4.2) $[\Pi(\kappa(y))];3(\kappa(y))=1$

Fra dette og (4) kan man slutte:

(5.1) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(5.2) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=1$ Fra (2.1) og første konjunkt i (3) følger:
(5.3) $x,y \hat{e} U\ \&\ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$

Fra (5.1) - (5.3) følger ved hjelp av definisjonen av C at $C(x,y)=1$. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y \hat{e} U\ \&\ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(2.2) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r$

Fra dette og definisjonen av C følger: (3) $C(x,y) =r$. Nå har man (4) $\kappa(\kappa(y)) =\kappa(y)$. Fra dette og (2.1) - (2.3) kan man slutte:

(5.1) $x,y \hat{e} U\ \&\ \emptyset \neq \kappa(\kappa(y)) \hat{e} Dom(\Pi)$
(5.2) $x\Omega\kappa(\kappa(y)) \hat{e} [\Pi(\kappa(\kappa(y)))];2$
(5.3) $[\Pi(\kappa(\kappa(y)))];3(x\Omega\kappa(\kappa(y)))=r$

© Morten Harboe Rognes 2019

Fra (5.1) - (5.3) og definisjonen av C kan man slutte: $C(x,\kappa(y)) = r$. Dette og (3) impliserer det vi ønsker, nemlig: $C(x,y) = C(x,\kappa(y))$. Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d) og (e): Anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(2.2) $x \Omega \kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

Siden $\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$ fordi $[\Pi(\kappa(y))];2$ er en naturlig boolsk algebra over $\kappa(y)$, og vi dessuten har at $[\Pi(\kappa(y))];3$ er en sannsynlighetsfunksjon over denne algebraen, kan vi også slutte at $[\Pi(\kappa(y))];3(\kappa(y)) = 1$. Det følger derfor at

(3.1) $\kappa(y) \Omega \kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(3.2) $[\Pi(\kappa(y))];3(\kappa(y) \Omega \kappa(y)) = 1$

Fra dette, (2.1) og definisjonen av C kan man utlede $\langle \kappa(y),y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Det følger også at $C(\kappa(y),y)=1$. Dette viser at punktene (d) og (e) holder.

Ad (f): Anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(2.2) $x \Omega \kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

Siden $\kappa(\kappa(y)) = \kappa(y)$ har man at (2.1) - (2.3) er ekvivalent med henholdsvis:

(3.1) $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(\kappa(y)) \hat{e} Dom(\Pi)$
(3.2) $(x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(\kappa(y)) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(3.3) $[\Pi(\kappa(y))];3((x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(\kappa(y))) = r$

Men i lys av definisjonen av C er (3.1) - (3.3) ekvivalent med $\langle x\Omega\kappa(y),\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Dette viser at punkt (f) holder.

Ad (g): Anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(2.2) $x \Omega \kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

Nå har man at $\kappa(\kappa(y)) = \kappa(y)$. Derfor er (2.1) - (2.3) ekvivalent med at det finne r der man har:

(3.1) $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(\kappa(y)) \hat{e} Dom(\Pi)$
(3.2) $x\Omega\kappa(\kappa(y)) \hat{e} [\Pi(\kappa(\kappa(y)))];2$
(3.3) $[\Pi(\kappa(\kappa(y)))];3(x\Omega\kappa(\kappa(y))) = r$

Men det at det finnes r slik at (3.1) - (3.3) holder er i lys av definisjonen av C ekvivalent med at $\langle x,\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Dette viser at punkt (g) holder.

Ad (h): Anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(2.2) $x \Omega \kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

© Morten Harboe Rognes 2019

Nå er imidlertid (2.1) - (2.3) ekvivalent med at det finne r der man har:

(3.1) $x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$

(3.2) $(x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

(3.3) $[\Pi(\kappa(y))];3((x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(y))=r$

Men det at det finnes r slik at (3.1) - (3.3) holder er i lys av definisjonen av C ekvivalent med at $<x\Omega\kappa(y),y> \hat{e} Dom(C)$. Dette viser at punkt (h) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 9.4 Anta $S=<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at $<I,R,C>$ er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man at $<I,R,C>$ faktisk er en relativ sannsynlighetsstruktur.

Bevis: Dette følger direkte fra Teorem 9.1 - Teorem 9.3 og definisjonen vi tidligere har gitt av relativ sannsynlighetsstruktur. **QED**.

Vi trenger den følgende sats i beviset for det neste teoremet.

Lemma 9.1 Anta $<I,R>$ er en preordningsstruktur. Da gjelder for alle $x,y \hat{e} Pt(I)=U$ at

$$x\Omega\kappa(y) \neq \emptyset \ \rightarrow x\Omega\kappa(y) = \kappa(x\Omega y)$$

Bevis: Anta (1) $x\Omega\kappa(y) \neq \emptyset$. Siden vi har per definisjon at $\kappa(y)= Max(R,y)$ følger fra (1) at

(1.1) $x\Omega Max(R,y) \neq \emptyset$

Det følger også ved hjelp av denne definisjonen at det vil være tilstrekkelig å vise

(2) $x\Omega Max(R,y) = Max(R,x\Omega y)$

(a) Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre i (2). Anta for vilkårlig z at (3) $z \hat{e} x\Omega Max(R,y)$ Ved hjelp av definisjonen av operasjonen Max kan man da slutte:

(4) $z \hat{e} x \ \& \ z \hat{e} y$ og (5) $(Ar)(r \hat{e} y \rightarrow R(z,r))$

Fra (4) følger (6) $z \hat{e} x\Omega y$. Fra (5) har vi $(Ar)(r \hat{e} x\Omega y \rightarrow R(z,r))$. Fra dette, (6) og definisjonen av Max kan vi da konkludere med at $z \hat{e} Max(R,x\Omega y)$.

(b) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre i (2). Fra (1.1) følger at det finnes w0 slik at

(7) $w0 \hat{e} x \ \& \ w0 \hat{e} Max(R,y)$

Siden $Max(R,x\Omega y)$ Inkl $x\Omega y$ Inkl x vil det være tilstrekkelig å vise:

(8) $Max(R,x\Omega y)$ Inkl $Max(R,y)$

Anta for reduktio ad absurdum at (8) *ikke* holder. Da må det finnes noe a0 der vi har:

(9) $a0 \hat{e} Max(R, x\Omega y) \ \& \ \neg(a0 \hat{e} Max(R,y))$

Fra (9) følger at (10) $a0 \hat{e} x\Omega y$ Inkl y. Fra (7), (9) og (10) kan man slutte (11) $R^*(w0,a0)$ Fra den første konjunkten i (9) følger:

(12) $(Az)(z \hat{e} x\Omega y \rightarrow R(a0,z))$

Fra (7) følger $w0 \hat{e} x\Omega y$. Fra dette og (12) følger åpenbart R(a0,w0) som åpenbart strider mot (11), siden $R^*(w0,a0)$ per definisjon impliserer $\neg(R(a0,w0))$. Dette viser at (9) er umulig og derfor at (8) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 9.4 Anta $S=<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at $<I,R,C>$ er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Anta

© Morten Harboe Rognes 2019

yêU = Pt(I) og at ø≠ κ(y) êDom(Π) og at Π(κ(y)) er multiplikativt. Da gjelder for alle x,z:

(a) <z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → <z,xΩy> ê Dom(C)
(b) <x,y>ê Dom(C) & C(x,y)> 0 → (<z,xΩy>êDom(C) → <zΩx,y>ê Dom(C)
(c) <z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → C(zΩx,y) = C(z,xΩy)*C(x,y)

Man gjenkjenner i punkt (a) - (c) de multiplikative aksiomene som ble introdusert og omtalt mot slutten av §3.

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) <z,y> ê Dom(C) og (2) <x,y> ê Dom(C). Anta dessuten at (3) C(x,y) > 0. Vi ønsker da å vise at <z,xΩy> êDom(C). Fra (1) og (2) følger ved hjelp av definisjonen av C at det finnes r1 og r2 slik at:

(4.1) z,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) & zΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(zΩκ(y))=r2
(4.2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) & xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r1

Fra (3), definisjonen av C og (4.2) kan man slutte at (5) r1 >0. Vi setter nå per definisjon:

(6) a=xΩκ(y)
(7) b=zΩκ(y)

Fra (5), (6) og (4.2) kan man da slutte at (8) aê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(a) > 0
Fra dette, forutsetningen om at Π(κ(y)) er multiplikativ samt Definisjon 8.3 kan man slutte:

(9) (Ay)(yê[Π(κ(y))];2 → yΩaê[Π(a)];2

Fra (7) og (4.1) følger bêΠ(κ(y));2. Fra dette og (9) har man så (10) bΩaêΠ(a);2
I lys av (6) og (7) impliserer (10) at

(11) (zΩκ(y))Ω (xΩκ(y)) ê Π(xΩκ(y));2 Herav:
(12) zΩ(xΩκ(y)) ê Π(xΩκ(y));2

Nå har vi fra (4.2), siden Π(κ(y));3 er en sannsynlighetsfunksjon og r1>0 at

(12.1) xΩκ(y) ≠ø

Fra dette og Lemma 9.1 kan man så slutte (+) xΩκ(y) = κ(xΩy). Fra (+) og (12) følger:

(13) zΩκ(xΩy) ê Π(κ(xΩy));2

Fra (12.1) og (+) følger også ø ≠ κ(xΩy). Fra (8) og Definisjon 8.3 kan man slutte at aêDom(Π). Men siden a=xΩκ(y) og ø≠ κ(xΩy) kan man ved hjelp av (+) slutte:

(14) ø≠ κ(xΩy)êDom(Π)

Fra (13) fremgår det at zΩκ(xΩy) er med i domenet til Π(κ(xΩy));3 og derfor at det må finnes noe r slik at Π(κ(xΩy));3(zΩκ(xΩy)) =r. Fra dette, (13), (14) og definisjonen av C følger at <z,xΩy>êDom(C). Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta forutsetningene i satsen holder og anta (1) <x,y>êDom(C) & C(x,y)>0. Da følger ved hjelp av definisjonen av C at

(2) ø≠ κ(y)êDom(Π) og
(3) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

for noe r. Anta nå (4) <z,xΩy>êDom(C). Ved hjelp av definisjonen av C kan man fra dette slutte at det finnes r2 slik at

(5) ø≠ κ(xΩy)êDom(Π)
(6) zΩκ(xΩy)ê[Π(κ(xΩy))];2
(7) [Π(κ(xΩy))];3(zΩκ(xΩy))=r2

© Morten Harboe Rognes 2019

Fra (1) og den siste konjunkten i (3) samt definisjonen av C følger at r>0 og derfor at xΩκ(y) ≠ø. Da har vi ved hjelp av Lemma 9, som vi beviste ovenfor, at:

(7.1) κ(xΩy) = xΩκ(y)

Fra (3) og definisjonen av multiplikativt sannsynlighetsrom og det at det forutsettes at Π(κ(y)) er multiplikativt følger at

(8) [Π(κ(xΩy))];2 = [Π(xΩκ(y))];2 Inkl [Π(κ(y))];2

Fra det at κ(xΩy) = xΩκ(y) og (6) kan man slutte at zΩxΩκ(y)ê[Π(κ(xΩy))];2

Herav har vi ved hjelp av (8):

(9) (zΩx)Ωκ(y) ê [Π(κ(y))];2

Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom må da (zΩx)Ωκ(y) være med i domenet til [Π(κ(y))];3 og vi må da ha at det finnes r' slik at

(10) [Π(κ(y))];3((zΩx)Ωκ(y)) =r'

Fra (2), (9), (10) samt definisjonen av C kan vi konkludere med at <zΩx,y>êDom(C). Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta forutsetningene i teoremet holder og at

(1) <z,y>,<x,y>êDom(C) & C(x,y)>0

Fra dette og definisjonen av C følger det at det finnes reelle tall r1, r2 der:

(2.1) ø≠ κ(y)êDom(Π)

(2.2) zΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & r1= [Π(κ(y))];3(zΩκ(y))

(2.3) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & r2= [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))

Fra (1) og (2.3) følger det også i lys av definisjonen av C at (2.4) r2>0. Det følger også fra (2.1) - (2.3) at

(3.1) C(zΩx,y) = [Π(κ(y))];3(zΩxΩκ(y)) = r3 for noe r3

(3.2) C(x,y) = [Π(κ(y))];3(xΩκ(y)) = r2 >0

Fra punkt (a) i teoremet samt (1) kan man slutte at <z,xΩy>êDom(C) og derfor at

(4) C(z,xΩy) = [Π(κ(xΩy))];3(zΩκ(xΩy)) =r4 for et eller annet reelt tall r4

Nå har vi fra (3.2 at (5) xΩκ(y) ≠ø I motsatt fall ville vi r2 i sall fall ha vært 0. Det følger derfor ved hjelp av Lemma 9.1 at (6) xΩκ(y) = κ(xΩy). Vi kan derfor fra (4) og (6) slutte:

(7) C(z,xΩy) = [Π(xΩκ(y))];3(zΩxΩκ(y)) =r4

Fra de to første konjunktene i (2.2) og (2.3) følger:

(8) zΩxΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2

La oss nå per definisjon sette:

(9.1) α = κ(y)

(9.2) z0 = xΩyΩκ(y)

(9.3) x0= xΩκ(y)

Det følger da fra (2.3) at vi har (10) x0ê[Π(α)];2 & [Π(α)];3(x0) >0. Vi har derfor fra forutsetningene og Definisjon 8.3 at

(11) [Π(α)];3(z0) = [Π(α)];3(x0) * [Π(x0)];3(z0)

I lys av (3.1), (3.2) og (7) har vi da:

(12) C(zΩx,y) = [Π(α)];3(z0)
C(x,y)= [Π(α)];3(x0)
C(z,xΩy) = [Π(x0)];3(z0)

Fra (11) og (12) følger så det vi ønsker C(zΩx,y) = C(z,xΩy)* C(x,y). Dette viser at punkt (c) holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2019

§10 Kanoniske preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av relative sannsynlighetsstrukturer.

Anta nå at <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur slik dette begrep ble definert i §4. Det vi nå ønsker å vise er hvordan man gitt en slik struktur kan definere en preordningstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, la oss kalle den <I,R,Π>. Dette innebærer at vi må definere funksjonen Π som til ethvert enkelhetsnivå tilordner visse delmengder av dette nivå sannsynlighetsrom. Vi gjør dette ved først å definere funksjonen P(κ(y)) og mengden σ(κ(y)) der P(κ(y)) er en sannsynlighetsfunksjon over κ(y) som er entydig bestemt av κ(y) så sant denne mengden er ikke-tom og σ(κ(y)) er en naturlig boolsk algebra over κ(y).

Vi definerer først disse to begrepene. Dette gjøres slik:

Definisjon 10.1 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at yêU (=Pt(I)). Da setter vi:

(a) $P(\kappa(y)) = Mg(\langle a,r\rangle: (Ex)(x\hat{e}U \,\&\, a= x\Omega\kappa(y) \,\&\, C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r))$

(b) $\sigma(\kappa(y)) = Mg(a: (Er)(\langle a,r\rangle \hat{e} P(\kappa(y))))$

Er <I,R,Π> en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom vil, som vi allerede har nevnt Π være en funksjon som tilordner eller fordeler diverse delmengder av de enkelte enkelhetsnivåene i preordningsstrukturen <I,R> sannsynlighetsrom. Gitt en relativ sannsynlighetsstruktur kan denne fordelingsfunksjonen Π defineres ved hjelp av P(κ(y)) og σ(κ(y)) på følgende måte:

Definisjon 10.2 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da setter vi:

$\Pi = Mg(\langle z,a\rangle: (Ey)(y\hat{e}U \,\&\, z=\kappa(y)\neq\emptyset \,\&\, (Ev)(\langle v,y\rangle \hat{e} Dom(C)) \; a = \langle \kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle))$

Vi kan nå definere hva vi mener den kanoniske preordningsstrukturen <I,R,H> med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av den relative sannsynlighetsstrukturen <I,R,C>:

Definisjon 10.3 Anta S = <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi kaller da strukturen S' =<I,R,H> der H er definert som i Definisjon 10.2 for den *kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av* S

Det som nå er vår oppgave er å vise at dersom S' =<I,R,Π> er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S, der S= <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur, så er det *faktisk* slik S' er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. De teoremer vi skal gi bevis for i det følgende viser at dette holder.

Vi starter med:

Teorem 10.1 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da har man:

(a) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \rightarrow \langle \kappa(y),y\rangle \hat{e}\ Dom(C)$

(b) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \rightarrow C(\kappa(y),y)=1$

© Morten Harboe Rognes 2019

(c) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow \langle x\Omega\ \kappa(y),\ \kappa(y)\rangle\ \hat{e}\ Dom(C)$

(d) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow \langle x,\kappa(y)\rangle \hat{e}\ Dom(C)$

(e) $\langle x,y\rangle \hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow \langle x\Omega\kappa(y),y\rangle \hat{e}\ Dom(C)$

Vi gir ikke noe detaljert bevis for denne satsen fordi den kan bevises på nøyaktig samme måte som Teorem 3.1 i §3. Det er imidlertid begrepsmessig en forskjell mellom denne satsen og Teorem 3.1. Man bør være klar over at en relativ sannsynlighetsstruktur er en ren mengdeteoretisk struktur, det er et begrep som er definert i rent mengdeteoretiske termer, det kan defineres utelukkende ved hjelp av medlemskapsrelasjonen "xêy" og mengdepredikatet "M(x)" (" x er en mengde"). Teorem 3.1 er derimot et teorem som inneholder predikater som ikke er rent mengdeteoretiske eller som i alle fall ikke i dette essay har blitt definert ved hjelp av rent mengdeteoretiske begreper.

Teorem 10.2 Anta $\langle I,R,C\rangle$ er en relativ sannsynlighetsstruktur. La $\sigma(\kappa(y))$ og $P(\kappa(y))$ være definert som ovenfor. Anta $y\hat{e}U$ & $(Ex)(\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C))$. Da har man at $\langle \kappa(y),\sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle$ er et sannsynlighetsrom over $\kappa(y)$.

Bevis: Anta $\langle I,R,C\rangle$ er en relativ sannsynlighetsstruktur og at $P(\kappa(y))$ og $\sigma(\kappa(y))$ er definert som ovenfor. Anta (1) $y\hat{e}U$ & $(Ex)(\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C))$. Vi må først vise $\sigma(\kappa(y))$ er en naturlig boolsk algebra over $\kappa(y)$.

(a) Vi viser først at $\kappa(y) \neq ø$. Dette følger direkte fra (1) og det forhold at en relativ sannsynlighetsstruktur oppfyller kravet $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow (Ez)Ba(z,y)$. For fra dette og (1) følger $(Ez)Ba(z,y)$. Fra dette og definisjonen av Ba kan man slutte $ø \neq \kappa(y)$ Inkl z som i sin tur impliserer $\kappa(y) \neq ø$.

(b) Dernest må vi vise at $\kappa(y) \hat{e} \sigma(\kappa(y))$. Fra (1) følger siden $\langle I,R,C\rangle$ oppfyller kravet D5 at $\langle y,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og punkt (e) i Teorem 10.1 kan man så utlede
(2) $\langle y\Omega\kappa(y),\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Siden $\kappa(y)$ Inkl y følger fra (2) at (3) $\langle \kappa(y),\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette følger $(Ev)(\langle v,\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Men herav kan vi ved hjelp av punkt (b) i Teorem 10.1 slutte at (4) $C(\kappa(y),\kappa(y))=1$ Fra dette har vi siden $\kappa(y)=\kappa(y)\Omega\kappa(y)$ at $C(\kappa(y)\Omega\kappa(y), \kappa(y))=1$. Vi har derfor:

(5) $\kappa(y)\Omega\kappa(y))=\kappa(y)$ & $C(\kappa(y)\Omega\kappa(y), \kappa(y))=1$

Fra definisjonen av $P(\kappa(y))$ følger

(6) $\langle \kappa(y),1\rangle \hat{e} P(\kappa(y)) \leftrightarrow (Ez)(z\hat{e}U$ & $\kappa(y)=z\Omega\kappa(y)$ & $C(z\Omega\kappa(y),\kappa(y))=1$

Høyre side i (6) følger fra (5). Vi har derfor $\langle \kappa(y),1\rangle \hat{e} P(\kappa(y))$. Men fra dette og definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ følger $\kappa(y) \hat{e} \sigma(\kappa(y))$.

(c) Vi må vise at følgende holder: $x\hat{e}\sigma(\kappa(y)) \rightarrow x$ Inkl $\kappa(y)$ for alle x.
Anta derfor for vilkårlig x at (2) $x\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Da har man ved hjelp av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ at (3) $\langle x,r\rangle \hat{e} P(\kappa(y))$ for noe r. Dette i sin tur impliserer at det finnes noe z der

(4) $z\hat{e}U$ & $x=z\Omega\kappa(y)$ & $C(z\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r$

Men fra den andre konjunkten i (4) følger åpenbart x Inkl $\kappa(y)$.

(d) Det er også nødvendig å vise at $x\hat{e}\sigma(\kappa(y)) \rightarrow (\kappa(y)\text{-}x)\ \hat{e}\sigma(\kappa(y))$ for alle x.
Anta for vilkårlig x at (2) $x\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Ved hjelp av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ følger da at

© Morten Harboe Rognes 2019

<x,r>ê P(κ(y)) for noe r. Dette i sin tur impliserer at det finnes noe z der

(4) zêU & x=zΩκ(y) & C(zΩκ(y),κ(y))=r

Den siste konjunkten impliserer (5) <zΩκ(y),κ(y)> êDom(C). Herav kan vi ved hjelp av punkt (c) i Teorem 10.1 slutte at (6) <z,y>êDom(C). Fra dette kan man ikraft av kravet D3 slutte at (7) <Neg(z),y>êDom(C). Fra dette kan man så ved hjelp av punkt (c) i Teorem 10.1 slutte: <Neg(z)Ωκ(y), κ(y)>êDom(C), med andre ord, siden Neg(z)=(I-z), at

(8) <(I- z)Ωκ(y),κ(y)> êDom(C)

Nå har man

(9) wê(I-z)Ω κ(y) ↔ wêκ(y) & wêI & ¬(wêz)
↔ we(κ(y) - (zΩκ(y))

Herav: (10) (I-z)Ωκ(y) = κ(y) - (zΩκ(y))

Fra (8) og (10) følger:

(11) <(κ(y) - (zΩκ(y))) Ωκ(y),κ(y)> êDom(C)

og derfor at det finnes r slik at

(12) C((κ(y) - (zΩκ(y))) Ωκ(y),κ(y))=r

I lys av (4) har man κ(y) -x = κ(y)- (zΩκ(y)) = (κ(y)- (zΩκ(y)))Ωκ(y)

Fra dette, (12) og definisjonen av P(κ(y)) kan man slutte <κ(y)-x,r>êP(κ(y)) og derfor ved hjelp av definisjonen av σ(κ(y)) at (κ(y)-x)êσ(κ(y)).

(e) Endelig er det nødvendig å vise at x,vê σ(κ(y)) → (xUv)êσ(κ(y))

Anta derfor for vilkårlige x,v at (2) x,vêσ(κ(y)). Det følger da ved hjelp av definisjonen av σ(κ(y)) at det må finne r1, r2 slik at

(3.1) <x,r1>êP(κ(y))

(3.2) <v,r2>êP(κ(y))

Fra dette og definisjonen av P(κ(y)) følger eksistensen av z1, z2 slik at

(4.1) z1êU & x=z1Ωκ(y) & C(z1Ωκ(y),κ(y))=r1

(4.2) z2êU & v=z2Ωκ(y) & C(z2Ωκ(y),κ(y))=r2

Fra den siste konjunkten i (4.1) og den siste konjunkten i (4.2) kan man ved hjelp av D4 slutte at det må finnes r3 slik at

(5) C((z1Uz2)Ωκ(y),κ(y)) = r3

Fra (4.1) og (4.2) følger også (6) z1Uz2êU & xUv = (z1Uz2)Ωκ(y)

Fra (5), (6), definisjonen av P(κ(y)) og definisjonen av σ(κ(y)) følger at (xUv)êσ(κ(y)).

Fra det som er vist under punktene (a) - (e) ovenfor fremgår det at vi har vist at σ(κ(y)) er en naturlig boolsk algebra over κ(y) om (Ez)(<z,y>êDom(C))

Det gjenstår å vise at P(κ(y)) er en funksjon som oppfyller kravene (a) - (d) i Definisjon 7.2 under forutsetningene som er nevnt i satsen.

(f) Vi viser først at P(κ(y)) er en funksjon. Anta (2) <x,r1>,<x,r2>ê P(κ(y)). Da følger ved hjelp av definisjonen av P(κ(y)) at det finnes z1,z2 der:

(3.1) z1êU & x=z1Ωκ(y) & C(z1Ωκ(y),κ(y))=r1

(3.2) z2êU & x=z2Ωκ(y) & C(z2Ωκ(y),κ(y))=r2

Fra den andre konjunkten i (3.1) og den andre konjunkten i (3.2) følger z1Ωκ(y) = z2Ωκ(y). Fra dette og de tredje konjunktene i henholdsvis (3.1) og (3.2) følger r1=r2.

(g) Det er opplagt i lys av definisjonene av P(κ(y)) og σ(κ(y)) at domenet til P(κ(y))

© Morten Harboe Rognes 2019

er identisk med σ(κ(y)). Man har altså Dom(P(κ(y)))= σ(κ(y)).

(h) Det er nødvendig at vi viser Rgn(P(κ(y))) Inkl [0,1]. Anta <x,r>êP(κ(y)) for noe x. Da finnes z slik at z1êU & x=zΩκ(y) & C(zΩκ(y),κ(y))=r. Det følger fra dette at rêRgn(C). Men Rgn(C) Inkl [0,1]. Da må vi ha rê[0,1]

(i) Under punkt (b) ovenfor viste vi, gitt forutsetningen (Ez)(<z,y>êDom(C)) at <κ(y),1>êP(κ(y)). Men fra dette følger siden P(κ(y)) er en funksjon at P(κ(y))(κ(y))=1

(h) Det eneste som det nå gjenstår å bevise er:

(+) x,zêσ(κ(y)) & xΩz=ø → P(κ(y))(xUz)=P(κ(y))(x)+P(κ(y))(z)

Anta derfor (2) x,zêσ(κ(y)) & xΩz=ø. Fra dette og definisjonen av σ(κ(y)) følger at det må finnes r1 og r2 der:

(3) <x,r1>ê P(κ(y)) &<z,r2>êP(κ(y))

Fra dette og definisjonen av P(κ(y)) kan man slutte at det finnes u1 og u2 der:

(4.1) u1êU & x=u1Ωκ(y) & C(u1Ωκ(y),κ(y))=r1

(4.2) u2êU & z=u2Ωκ(y) & C(u2Ωκ(y),κ(y))=r2

Det følger at (5) C(x,κ(y))= r1 & C(z,κ(y))= r2. Fra dette, D8 og det at xΩz=ø kan man utlede: (6) C(xUz,κ(y)) = C(x,κ(y))+ C(z,κ(y))

Dette impliserer sammen med (5) at

(7) C(xUz,κ(y)) =r1+r2 og derfor i lys av (4.1) og (4.2):

(8) C((u1Uu2)Ωκ(y),κ(y))=r1+r2

Nå har man (9) xUz = (u1Uu2)Ωκ(y) & xUzê U. Fra (8), (9) og definisjonen av P(κ(y)) følger P(κ(y))(xUz)=r1+r2. Men fra dette, (3) og det faktum at P(κ(y)) er en funksjon følger det vi ønsker: P(κ(y))(xUz) = P(κ(y))(x) + P(κ(y))(z)

Dette viser at (+) holder. Vi har nå gitt et fullstendig bevis for <κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))> er et sannsynlighetsrom over κ(y). **QED**.

Teorem 10.3 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at Π er definert som i Definisjon 10.2. Da har man at <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom

Bevis: At R er en preordning over I følger uten videre fra forutsetningene i teoremet.

(a) Vi viser først at Π er en funksjon. Anta (1) <z, a1>ê Π & <z,a2>êΠ . Vi ønsker å vise at a1=a2. Fra (1) og definisjonen av Π følger at det må finnes y1 og y2 der man har:

(2) y1êU & z= κ(y1) & (Ev)(<v,y1>êDom(C)) & a1=< κ(y1), σ(κ(y1)),P(κ(y1))>

(3) y2êU & z= κ(y2) & (Ev)(<v,y2>êDom(C)) & a2=< κ(y2), σ(κ(y2)),P(κ(y2))>

Fra den andre konjunkten i (2) og den andre konjunkten i (3) følger κ(y1)=z=κ(y2). Fra dette, den siste konjunkten i (2) og den siste konjunkten i (3) følger umiddelbart at a1=a2. Dette viser åpenbart at Π er en funksjon.

(b) Anta (1) xêDom(Π): Da må det finnes a slik at (2) <x,a>êΠ. Fra dette og definisjonen av Π kan vi slutte at det må finnes y slik at

(3) yêU & x= κ(y) ≠ø & (Ev)(<v,y>êDom(C)) & a=< κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))>

© Morten Harboe Rognes 2019

Fra det at Π er en funksjon og (1) følger Π(x)=a. Fra dette og den siste konjunkten i (3) kan man så slutte Π(x)=< κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))>. Fra den tredje konjunkten i (3) og Teorem 10.2 følger at < κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))> er et sannsynlighetsrom over κ(y)=x. Det følger at Π(x) er et sannsynlighetsrom over x

(c) Vi må bevise at (+) Dom(Π) Inkl UN(Mg(Pt([w];R-{ø}: wêI))
Anta (1) xêDom(Π). Da har vi at det må finnes a slik at <x,a>êΠ. Fra dette og definisjonen av Π følger (som ovenfor) eksistensen av et utsagn y der vi har:

(2) x= κ(y) ≠ø & (Ev)(<v,y>êDom(C) & a=< κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))>

Nå har vi per definisjon at κ(y) = Max(R,y) og videre at κ(y)≠ø. Det følger at det må finnes noe w0 der (3) w0êI & w0êMax(R,y) =x. Men fra dette følger:

(4) x=Max(R,y) Inkl [w0];R

Fra (3) og (4) har vi ø≠x Inkl [w0];R og derfor xê(Pt([w0];R)- {ø}). Fra dette og (3) kan man slutte xê UN(Mg(Pt([w];R-{ø}: wêI)). Dette viser at (+) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at strukturen <I,R,Π> oppfyller alle de krav som stilles til en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. **QED**.

Vi har nå også gitt bevis for den følgende sats som kan oppfattes som et korollar til Teorem 10.3 og som sier at den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom som er bestemt av den relative sannsynlighetsstrukturen <I,R,C> faktisk er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

Teorem 10.4 Anta S=<I,R,C> er en relativ sansynlighetsstruktur. Anta S'=<I,R,Π> er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S. Da er S' en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

La nå S=<I,R,C> være en relativ sannsynlighetsstruktur. La Π, P(κ(y)) og σ(κ(y)) være definert som tidligere, det vil si ved definisjonene Definisjon 10.2 og Definisjon 10.3. Vi kan da definere en funksjon C* ved hjelp av disse begrepene nøyaktig som vi gjorde i §8 ved hjelp av Definisjon8.2. Med andre ord kan vi sette:

C* = Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Merk at denne definisjonen ikke er identisk med Definisjon 8.2 fordi Π nå er et definert begrep. Det vi nå ønsker å vise er at C* = C. La oss først bare sette opp denne definisjonen av C* formelt:

Definisjon 10.4 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og anta at Π er definert som i Definisjon 10.2. Da er C* definert ved:

C* = Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Vi ønsker altså å bevise at C=C* om <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Imidlertid finner vi det hensiktsmessig å bevise den følgende sats først fordi vi kan bruke den i beviset for at C=C*.

© Morten Harboe Rognes 2019

Teorem 10.5 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at Π, P(κ(y)) og σ(κ(y)) er definert som tidligere. Da har man:

(a) Dersom <x,y>êDom(C) holder:
  (i) $P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y)) = C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y)) = C(x,y)$
  (ii) $\sigma(\kappa(y)) = Mg(x\Omega\kappa(y): <x,y>\hat{e}Dom(C))$

(b) Dersom $(Ez)(<z,y>\hat{e}Dom(C))$ så har man:
  $\Pi(\kappa(y)) = <\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))>$

(c) Dersom <x,y>êDom(C) gjelder:
  $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y))$

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) <x,y>êDom(C). Dette er i lys av Teorem 10.1 c ekvivalent med at (2) $<x\Omega\kappa(y),\kappa(y)>\hat{e}Dom(C)$. Fra dette siste kan man slutte at det finnes r slik at (3) $C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y)) = r$. Nå må det åpenbart være slik at $x\Omega\kappa(y)=x\Omega\kappa(y)$. Fra dette følger at det finnes a slik at (4) $a=x\Omega\kappa(y)$. (1) impliserer også at (5) xêU (C Inkl UxU). Vi har derfor: (6) $x\hat{e}U \ \& \ a=x\Omega\kappa(y) \ \& \ C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r$
Fra dette og definisjonen av $P(\kappa(y))$ følger $<a,r>\hat{e}P(\kappa(y))$ og derfor siden $P(\kappa(y))$ er en funksjon at $P(\kappa(y))(a)=r$. Fra dette, (3) og (4) følger det vi ønsker:

$$P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y)) = C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))$$

Siden <x,y>êDom(C) følger ved hjelp av Teorem 10.1d at $<x,\kappa(y)>\hat{e}Dom(C)$. Fra dette og D7 kan man konludere at $C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y)) = C(x,\kappa(y))$. Men siden <x,y>êDom(C) har vi også ved hjelp av F3 at $C(x,\kappa(y))=C(x,y)$. Samler vi sammen ser man at

(6) $P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y)) = C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=C(x,y)$

Dette viser at (i) under punkt (a) holder.

La oss se på (ii) under punkt (a): Vi har for alle z at:

$z\hat{e}\sigma(\kappa(y)) \leftrightarrow (Er)(<z,r>\hat{e}P(\kappa(y))$
$\leftrightarrow (Er)(Ex)(x\hat{e}U \ \& \ z=x\Omega\kappa(y) \ \& \ C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r)$
$\leftrightarrow (Ex)(x\hat{e}U \ \& \ z=x\Omega\kappa(y) \ \& \ <x,y>\hat{e}Dom(C))$ (Jmf. (3) og (6))
$\leftrightarrow z\hat{e}Mg(x\Omega\kappa(y): <x,y>\hat{e}Dom(C))$

Dette viser at (ii) under punkt (a) holder.

Ad (b): Anta (1) <z,y>êDom(C) for noe z. Det følger da ved hjelp av Teorem 10.2 at $<\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))>$ er et sannsynlighetsrom over κ(y) og derfor at det finnes a slik at (2) $a=<\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))>$. Fra (1) følger (3) $(Ez)(<z,y>\hat{e}Dom(C))$. Fra (1) og F1 følger også (Ez)Ba(z,y) og derfor at (4) $b=\kappa(y)\neq\emptyset$ for noe b. Fra (2), (3) og (4) samt definisjonen av Π følger $<b,a>\hat{e}\Pi$ og derfor, siden Π er en funksjon at (5) $\Pi(b)=a$. Men fra dette, (2) og (4) følger (6) $\Pi(\kappa(y))= <\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))>$. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta (1) <x,y>êDom(C). Da følger ved hjelp av punkt (b) at $\Pi(\kappa(y))= <\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))>$ og derfor at (2) $[\Pi(\kappa(y))];3 = P(\kappa(y))$. Siden $<x,y>\hat{e}Dom(C)$ har vi ved hjelp av punkt(a), underpunkt (ii), at $x\Omega\kappa(y)\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Fra dette og (2) følger så $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y))$.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 10.6 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da gjelder: C*=C

© Morten Harboe Rognes 2019

Bevis: *(a)* Vi viser først inklusjonen mot høyre, ie. C* Inkl C. Anta (1) <<x,y>,r>êC*. Da følger ved hjelp av definisjonen av C* at

(2.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)

(2.2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2

(2.3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Fra κ(y)êDom(Π) følger <κ(y),r1>êΠ for noe r1. Fra dette og definisjonen av Π kan man slutte (3) (Ez)(<z,y>êDom(C)). Fra dette og Teorem 10.5 følger:

(4) [Π(κ(y)];3 = P(κ(y))

Fra (2.2), (3) og Teorem 10.5 kan man slutte at

(5) xΩκ(y) ê[Π(κ(y))];2 = σ(κ(y)) Vi har derfor:

(6) <xΩκ(y),r2>êP(κ(y)) for noe r2. I lys av definisjonen av P(κ(y)) kan vi da slutte at det må finnes z slik at

(6.1) zêU &xΩκ(y)=zΩκ(y) og (6.2) C(xΩκ(y),κ(y)) =r2

Men fra (6.2) følger <xΩκ(y),κ(y)>êDom(C), og ved hjelp av dette og Teorem 10.1 c følger <x,y>êDom(C). Herav følger ved hjelp av Teorem 10.5 c at

[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))= P(κ(y))(xΩκ(y)) = C(xΩκ(y), κ(y))=C(x,y).

Fra dette og (2.3) kan man konkludere med at C(x,y)=r og derfor <<x,y>,r>êC.

Dette viser inklusjonen mot høyre.

(b) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre, ie. C Inkl C*. Anta (1) <<x,y>r>êC. Da følger siden C er en funksjon at (2) C(x,y)=r. Siden det fra (1) også følger at (3) <x,y>êDom(C) har vi ved hjelp av F3 at C(x,y) = C(x,κ(y)). Videre har vi fra (3) og Teorem 10.1 at <x,κ(y)>êDom(C). Fra dette og D7 følger C(xΩκ(y),κ(y))=C(x,κ(y)). Vi har derfor C(x,y)=C(xΩκ(y),κ(y)). Fra dette og (2) følger så

(4) C(x,y)=C(xΩκ(y),κ(y)) =r

Følgelig har vi fra (3),(4) og Teorem 10.5 P(κ(y))(xΩκ(y))=r og derfor (igjen ved hjelp av Teorem 10.5) at (5) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r.

Fra (3) og F1 følger (Ez)Ba(z,y). Herav ø≠κ(y). Fra dette, (3) og definisjonen av Π kan man så slutte at κ(y)êDom(Π) og derfor (6) ø≠κ(y)êDom(Π)

Videre følger ved hjelp av (3), (4) definisjonen σ(κ(y)) og Teorem 10.5 at

(7) xΩκ(y) êσ(κ(y)) = [Π(κ(y))];2

Fra (6), (7), (5) og definisjonen av C* følger så at <<x,y>,r>êC*.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi har nå sett at om <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og C defineres som ved Definisjon 8.2 så er <I,R,C> en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi har også vist det omvendte, nemlig at dersom <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur så kan man på kanonisk vis, ved hjelp av Definisjonene 10.1 og 10.2 definere P(κ(y)), σ(κ(y)) og Π på en slik måte at man kan vise at <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

Vi har også vist at dersom <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, C defineres som ved Definisjon 8.2 , yêPt(I) og Π(κ(y)) er multiplikativt så oppfyller y de følgende krav:

(M1) <z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → <z,xΩy> ê Dom(C)

(M2) <x,y>ê Dom(C) & C(x,y)> 0 → (<z,xΩy>êDom(C) → <zΩx,y>ê Dom(C)

© Morten Harboe Rognes 2019

(M3) $\langle z,y\rangle,\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \& C(x,y) > 0 \rightarrow C(z\Omega x,y) = C(z,x\Omega y)*C(x,y)$

Det er naturligvis det siste kravet som er bakgrunnen for at vi kaller $\Pi(\kappa(y))$ for multiplikativt. Det vi nå vil forsøke å gjøre er å vise at det omvendte også holder, nemlig at dersom vi tar vårt utgangspunkt i en relativ sannsynlighetsstruktur <I,R,C>, definerer $P(\kappa(y))$, $\sigma(\kappa(y))$ og Π som ved Definisjon 10.1 og 10.2, antar at $y\hat{e}Pt(I)=U$ og at $\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$ og at y oppfyller kravene M1- M3 ovenfor så vil $\Pi(\kappa(y))$ være multiplikativt, det vil si oppfylle kravene nevnt i Definisjon 8.3.

La oss formulere dette eksplisitt som et teorem:

Teorem 10.7 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Anta $P(\kappa(y))$, $\sigma(\kappa(y))$ og Π er definert som tidligere. Anta $y\hat{e}Pt(I)=U$ er et utsagn som oppfyller kravene M1 - M3 ovenfor for alle x og z. og at $\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$. Da er $\Pi(\kappa(y))$ multiplikativt, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 8.3

Bevis: Før vi starter med selve beviset minner vi om at under forutsetningene i satsen vil <I,R,Π> være, som vi har bevist, en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og den kanoniske sådan bestemt av <I,R,C>.

Vi setter (1) $\alpha= \kappa(y)$. Vi har da fra forutsetningene at (1.1) $\alpha\hat{e}Dom(\Pi)$. La β være et vilkårlig utsagn der (2) $\beta\hat{e}[\Pi(\alpha)];2$ & $[\Pi(\alpha)];3(\beta) > 0$. Vi må da vise at de følgende påstander holder

(I) $[\Pi(\beta)];2$ Inkl $[\Pi(\alpha)];2$

(II) $(A\gamma)(\gamma\hat{e}[\Pi(\beta)];2 \rightarrow [\Pi(\alpha)];3(\gamma) = [\Pi(\alpha)];3(\beta) * [\Pi(\beta)];3(\gamma))$

(III) $(A\gamma)(\gamma\hat{e}[\Pi(\alpha)];2 \rightarrow \gamma\Omega\beta\hat{e}[\Pi(\beta)];2)$

(IV) β $\hat{e}Dom(\Pi)$

Siden vi antar $\alpha=\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$ følger det at det må finnes noe a slik at (3) $\langle\alpha,a\rangle\hat{e}\Pi$. Fra dette og definisjonen av Π følger det at det må finnes noe z der vi har:

(4) $z\hat{e}U \& \alpha= \kappa(z) \neq\emptyset \& (Ev)(\langle v,z\rangle\hat{e}Dom(C) \& a= \langle\kappa(z), \sigma(\kappa(z)), P(\kappa(z))\rangle$

Fra (1) har vi (5) $\alpha=\kappa(y)$. Fra (3) kan man slutte, siden det følger fra forutsetningene og tidligere teoremer at Π er en funksjon at $\Pi(\alpha)=a$, og siden man fra (5) og den andre konjunkten i (4) kan man slutte at $\kappa(y)=\kappa(z)$, følger ved hjelp av den siste konjunkten i (4) at

(6) $\Pi(\alpha) = \langle\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle$

Nå har vi fra (2) at $\beta\hat{e}[\Pi(\alpha)];2$. Dette og (6) impliserer (7) β $\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Fra dette og definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ følger at det finnes noe r2 slik at (8) $\langle\beta,r2\rangle\hat{e}P(\kappa(y))$. I sin tur følger fra dette ved hjelp av definisjonen av $P(\kappa(y))$ at det må finnes noe x slik at

(9) $x\hat{e}U \& \beta=x\Omega\kappa(y) \& C(x\Omega\kappa(y), \kappa(y))=r2$

Fra (2) og (6) følger (10) $[\Pi(\alpha)];3(\beta)=P(\kappa(y))(\beta)=r2 >0$. Fra dette at $r2>0$ og den siste konjunkten i (9) kan man slutte at

(11) $x\Omega\kappa(y)\neq\emptyset$

Ved hjelp av et lemma vi tidligere viste, Lemma 9.1, følger fra (11) at

(12) $\kappa(x\Omega y) = x\Omega\kappa(y)$ Da ved hjelp av (11):

(12.1) $\kappa(x\Omega y) = x\Omega\kappa(y)\neq\emptyset$

Fra den siste konjunkten i (9) følger $\langle x\Omega\kappa(y),\kappa(y)\rangle\hat{e}Dom(C)$. Fra dette kan man så ved hjelp av Teorem 10.1 c slutte $\langle x,y\rangle\hat{e}Dom(C)$ Fra dette og Teorem 10.1 d følger $\langle x,\kappa(y)\rangle\hat{e}Dom(C)$. Herav følger så ved hjelp av D7 at $C(x,\kappa(y))= C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))$. Fra det at $\langle x,y\rangle\hat{e}Dom(C)$ følger også ved hjelp av F3 at $C(x,y)=C(x,\kappa(y))$. Fra det vi her har nevnt ser man at vi må ha

© Morten Harboe Rognes 2019

C(x,y)=C(xΩκ(y),κ(y))=r2 >0 i lys av (9)
Fra M1 følger <x,y>êDom(C) & C(x,y)>0 → <x,xΩy>êDom(C)
Siden vi har C(x,y)>0 &<x,y>êDom(C) følger
(12.2) <x,xΩy>êDom(C)
og derfor (Ez)(<z,xΩy>êDom(C). Fra dette kan man ved hjelp av Teorem 10.2 slutte at
(12.3) <κ(xΩy), σ(κ(xΩy)), P(κ(xΩy))> er et sannsynlighetsrom over κ(xΩy).
Fra (12.1) - (12.3) og definisjonen av Π følger:
(13) Π(κ(xΩy)) = <κ(xΩy), σ(κ(xΩy)), P(κ(xΩy))>
Siden β=xΩκ(y)= κ(xΩy) i følge (9) og (12.1) følger ved hjelp av (13) at βêDom(Π). Dette viser at (IV) ovenfor holder.
Fra (13) og det at β=κ(xΩy) følger også:
(14) [Π(β)];2 = σ(κ(xΩy))

(a) Anta nå for vilkårlig γ at (15) γê[Π(β)];2. Da følger ved hjelp av (14) at γêσ(κ(xΩy)). Fra dette og definisjonen av σ(κ(xΩy)) følger at det må finnes z og r' der:
(16) γ= zΩκ(xΩy) & C(zΩκ(xΩy), κ(xΩy))=r'
Fra dette følger:
(16.1) γ= zΩκ(xΩy) & <zΩκ(xΩy), κ(xΩy)>êDom(C)
Fra dette følger fordi xΩκ(y) = κ(xΩy)
(16.2) γ= zΩxΩκ(y) & <zΩxΩκ(y), xΩκ(y)>êDom(C)
Nå har vi ovenfor bevist at C(x,y)>0 & <x,y>êDom(C). Fra dette siste og F3 følger C(x,y)=C(x,κ(y)) og derfor C(x,κ(y)) >0. Men fra <x,y>êDom(C) og Teorem 10.1d har vi <x,κ(y)>êDom(C). Vi har derfor (*) <x,κ(y)>êDom(C) & C(x,κ(y))>0. Fra dette, siste konjunkt i (16.2) og M2 følger: <zΩxΩκ(y)Ωx, κ(y)>êDom(C), med andre ord:
(16.3) <zΩxΩκ(y), κ(y)>êDom(C)
Men sammen med (16.2) impliserer dette γ= zΩxΩκ(y) & <zΩxΩκ(y), κ(y)>êDom(C)
Ved hjelp av definisjonen av σ(κ(y)) kan man fra dette slutte, i lys av (6), at
γêσ(κ(y)) = [Π(κ(y))];2 = [Π(α)];2
Dette viser at (I) ovenfor holder.

(b) Vårt neste mål er å vise at (II) ovenfor holder. Anta derfor for vilkårlig γ at γê[Π(β)];2 Da har vi som under (a) at det må finnes z,r' slik at
(17.1) γ= zΩκ(xΩy) & C(zΩκ(xΩy), κ(xΩy))=r'
Siden xΩκ(y) ≠ø ifølge (11) og derfor κ(xΩy)=xΩκ(y) følger fra (17.1) at
(17.2) γ= zΩxΩκ(y) & C(zΩxΩκ(y), xΩκ(y))=r'
Fra det vi har vist under (a) fremgår det at γê[Π(α)];2. Fra dette kan man slutte ved hjelp av (6) og definisjonen av P(σ(κ(y)) at det finnes r3 der
(17.3) [Π(α)];3(γ) = P(κ(y))(γ) = C(zΩxΩκ(y), κ(y))=r3
Fra (17.1) følger ved hjelp av definisjonen av P(κ(xΩy)) at
(17.4) [Π(β)];3(γ) = P(κ(xΩy))(γ) = C(zΩκ(xΩy), κ(xΩy)) =
C(zΩxΩκ(y), xΩκ(y))=r'
Tilslutt fremgår det fra (9) og (10) ovenfor at
(18) [Π(α)];3(β) = P(κ(y))(β) = C(xΩκ(y),κ(y)) =r2
Fra (17.3) følger
(19) <zΩxΩκ(y), κ(y)>êDom(C). Fra dette og Teorem 10.1 c kan man slutte:
(20) <zΩx,y>êDom(C)

© Morten Harboe Rognes 2019

Fra dette kan man så ved hjelp av F3 slutte:

(20.1) $C(z\Omega x,y) = C(z\Omega x, \kappa(y))$

Men fra (20) og Teorem 10.1 d følger $\langle z\Omega x,\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette, (20.1) og D7 følger

(20.2) $C(z\Omega x,y) = C(z\Omega x\Omega\kappa(y),\kappa(y))$

På tilsvarende vis kan man vise:

(20.3) $C(z\Omega x\Omega\kappa(y),x\Omega\kappa(y)) = C(z\Omega x,x\Omega y)$. Endelig har man:

(20.4) $C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y)) = C(x,y)$

Nå har man $\langle z\Omega x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ og $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ & $C(x,y) > 0$

Fra dette kan man ved hjelp av M3 slutte

(21) $C((z\Omega x)\Omega x,y) = C(z\Omega x,x\Omega y)^* C(x,y)$. Herav:

(21.1) $C(z\Omega x,y)= C(z\Omega x,x\Omega y)^* C(x,y)$

Nåvel, fra (21.1), (20.2) - (20.4) samt (17.3), (17.4) og (18) kan man slutte det vi ønsker:

$[\Pi(\alpha)];3(\gamma) = [\Pi(\alpha)];3(\beta) * [\Pi(\beta)];3(\gamma)$

Dette viser at (II) holder.

(c) Vi ønsker å vise (III) holder. Anta derfor (22) $\gamma \hat{e} [\Pi(\alpha)];2$. Da har vi ved hjelp av (6) at (23) $\gamma \hat{e} \sigma(\kappa(y))$ og derfor i lys av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ at det finnes z og r slik at

(24) $\gamma = z\Omega\kappa(y)$ & $C(z\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r$

Nå har vi fra (9) at (25) $\beta=x\Omega\kappa(y)$. Vi har derfor:

(26) $\gamma\Omega\beta = (z\Omega x)\Omega\kappa(y)$

Fra (24) følger $\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ ved hjelp av Teorem 10.1. Videre har vi:

(27) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ & $C(x,y)>0$

Fra dette og M1 kan man slutte at

(28) $\langle z,x\Omega y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Men fra dette følger ved hjelp av Teorem 10.1 c:

(29) $\langle z\Omega\kappa(x\Omega y), \kappa(x\Omega y)\rangle \hat{e} Dom(C)$

Fra (26) og det faktum at $x\Omega\kappa(y)=\kappa(x\Omega y)$ siden $x\Omega\kappa(y)\neq\emptyset$ følger

(30) $\gamma\Omega\beta = z\Omega\kappa(x\Omega y)$.

Fra (29), (30) og (13) samt definisjonen av $\sigma(\kappa(x\Omega y))$ følger $\gamma\Omega\beta \hat{e} [\Pi(\beta)];2$. Dette viser at (III) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Ovenfor har vi vist at dersom vi starter med en relativ sannsynlighetsstruktur $S=\langle I,R,C\rangle$ og så konstruerer den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom $S'=\langle I,R,\Pi\rangle$ bestemt av S, og dernest definerer den relative sannsynlighetsfunksjonen C* som i Definisjon 8.2 så er $C=C^*$.

Det vi nå skal gjøre er å vise at noe helt analogt gjelder om vi starter med en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom $S=\langle I,R,\Pi\rangle$ og konstruerer den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen $S'=\langle I,R,C\rangle$. Det er da mulig å definere en funksjon Π^* nøyaktig som ved Definisjon 10.2 og vise at $\Pi^*=\Pi$. Dette innebærer at om S' er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom $S=\langle I,R,\Pi\rangle$ og S" er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom som er bestemt av S' så er S" faktisk identisk med S, ie. S"=S.

Den satsen vi har i tankene kan formuleres på følgende måte:

© Morten Harboe Rognes 2019

Teorem 10.8 Anta <I,R,H> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. La C være definert ved hjelp av H slik som i Definisjon 8.2 i §8. Definer, om yêU, P(κ(y)) og σ(κ(y)) på følgende måte:

(i) P(κ(y)) = Mg(<a,r>: (Ex)(xêU & a= xΩκ(y) & C(xΩκ(y),κ(y))=r))

(ii) σ(κ(y)) = Mg(a: (Er)(<a,r>êP(κ(y))))

Definer tilslutt Π* ved:

(iii) Π* = Mg(<z,a>: (Ey)(yêU & z=κ(y)≠ø & (Ev)(<v,y>êDom(C)) & a = <κ(y), σ(κ(y)), P(κ(y))>))

Gitt disse forutsetningene har man at følgende holder:

Π=Π*

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi beviser først inklusjonen mot høyre i konklusjonen i satsen, med andre ord beviser vi først:

(+) Π Inkl Π*

Anta derfor at (1) <z,a>êΠ for vilkårlige z,a. Siden det følger fra forutsetningene at Π er en funksjon har man da:

(2) zêDom(Π).

(3) Π(z) er et sannsynlighetsrom over over z.

Det følger fra (2) (når man husker på vår notasjon i forbindelse med n-tupler) at:

(4) Π(z) = <z, [Π(z)];2, [Π(z)];3>

Siden zêDom(Π) følger også ved hjelp av definisjonen av Π at

zêUN(Mg(Pt([w];R)-{ø}: wêI)

Det følger fra dette siste at det må finnes w0 der

(5) zê(Pt([w0];R) - {ø}) & w0êI

Fra dette følger at det må finnes noe yêU slik at (6) ø≠z= Max(R,y) = κ(y). Fra (4) og (6) følger: (7) a= Π(κ(y)) = <κ(y), [Π(κ(y))];2, [Π(κ(y))];3>

Vi må nå vise at <z,a>êΠ*. Som man ser fra forutsetningene i teoremet vil det være tilstrekkelig å bevise de følgende påstander:

(a) P(κ(y)) = [Π(κ(y))];3

(b) σ(κ(y)) = [Π(κ(y))];2

(c) z=κ(y) ≠ ø & (Ev)(<v,z>êDom(C)) & a = <κ(y),σ(κ(y)),P(κ(y)) >

Når det gjelder disse tre påstandene vil det i sin tur være tilstrekkelig å bevise (a) og (b). Fra disse to påstandene og (7) følger den siste konjunkten i (c). Den første konjunkten i (c) følger fra (6). Den andre konjunkten følger fordi vi har at Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom. Ved hjelp av definisjonen av C har man da

yΩκ(y)ê [Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(yΩκ(y))=1 & ø≠κ(y)êDom(Π)

Fra dette følger C(y,y)=1 og derfor <y,y>êDom(C). Herav den andre konjunkten (Ev)(<v,z>êDom(C)). Vi konkluderer derfor med at det er tilstrekkelig å vise (a) og (b).

Ad (a): Anta for vilkårlige b, r at (8.1) <b,r>ê [Π(κ(y))];3. Da følger at bê [Π(κ(y))];2. Videre følger det siden [Π(κ(y))];2 er en naturlig boolsk algebra over κ(y) at κ(y)ê[Π(κ(y))];2. Fra dette og det at bê [Π(κ(y))];2 kan man slutte at b Inkl κ(y) og derfor:

(8.2) bΩκ(y)= b ê [Π(κ(y))];2

Nå har man fra (8.1): [Π(κ(y))];3(b)=r. Fra dette og (8.2) kan man slutte at

© Morten Harboe Rognes 2019

(8.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(b\Omega\kappa(y)) = r$

Fra (6) og (2) følger (8.4) $\emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$. Fra (8.2), (8.3) og (8.4), samt definisjonen av C følger $C(b\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r \ \& \ b=b\Omega\kappa(y)$. Fra dette og definisjonen av $P(\kappa(y))$ som er gitt blandt forutsetningene kan man så slutte $<b,r> \hat{e} P(\kappa(y))$.

La oss så vise inklusjonen den andre veien. Anta $<b,r> \hat{e} P(\kappa(y))$ for vilkårllige b og r. Fra definisjonen av $P(\kappa(y))$ kan man da slutte at det finnes noe x slik at

(8.5) $b=x\Omega\kappa(y) \ \& \ C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r$

Ved hjelp av definisjonen av C har vi da:

(8.6) $(x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(\kappa(y)) \hat{e} [\Pi(\kappa(\kappa(y)))];2 \ \& \ [\Pi(\kappa(\kappa(y)))];3(x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(\kappa(y)) = r$

Siden $\kappa(\kappa(y)) = \kappa(y)$ om $\kappa(y) \neq \emptyset$ er dette ekvivalent med:

(8.7) $(x\Omega\kappa(y)) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2 \ \& \ [\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

Siden $b=x\Omega\kappa(y)$ ifølge (8.5) følger fra (8.7) at $<b,r> \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];3$. Dette viser at (a) ovenfor holder.

Ad (b): Vi må naturligvis også vise at $\sigma(\kappa(y)) = [\Pi(\kappa(y))];2$. Dette er likefrem fordi vi har:

$b \hat{e} \sigma(\kappa(y)) \leftrightarrow (Er)(<b,r> \hat{e} P(\kappa(y)))$

$\leftrightarrow (Er)(<b,r> \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];3)$ (fordi (a) ovenfor holder.)

$\leftrightarrow b \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

Den siste bikondisjonalen holder fordi $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (+).

Vi må også bevise at (++) Π^* Inkl Π. Anta derfor (9) at $<z,a> \hat{e} \Pi^*$ for vilkårlige z og a. Ved hjelp av definisjonen Π^* følger da at det finnes $y \hat{e} U$ slik at

(10) $z=\kappa(y) \neq \emptyset \ \& \ (Ev)(<v,y> \hat{e} Dom(C)) \ \& \ a = <\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))>$

Fra den andre konjunkten i (10) og definisjonen av C følger:

(11) $z=\kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$

På samme måte som ovenfor kan man vise

(12.1) $P(\kappa(y)) = [\Pi(\kappa(y))];3$

(12.2) $\sigma(\kappa(y)) = [\Pi(\kappa(y))];2$

Nå har vi $z \hat{e} Dom(\Pi)$. Videre kan vi på samme måte som vi beviste (4), bevise at $\Pi(z) = <z, [\Pi(z)];2, [\Pi(z)];3>$. Det følger fra dette, (10), (12.1) og (12.2) at $\Pi(z)=a$ og derfor at $<z,a> \hat{e} \Pi$. Dette viser at (++) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§11 Om forholdet mellom preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom og relative sannsynlighetsstrukturer.

Anta $S=<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da er *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S* slik som definert i §9 entydig bestemt. Forkorter vi uttrykket " S' er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S " med "F(S',S)" har vi derfor at $(Ey)(y= (iS')F(S',S))$ om S er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Betegner vi klassen av alle preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom med Φ kan vi definere en funksjon ψ ved å sette:

$\psi = Mg(<S',S> : F(S',S) \ \& \ S \hat{e} \Phi)$

© Morten Harboe Rognes 2019

Er da SêΦ har vi at ψ(S) er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S.

På tilsvarende vis: Anta S=<I,R,Π> er en relativ sannsynlighetsstruktur Da er *den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S* slik som definert i §10 entydig bestemt. Forkorter vi uttrykket " S' er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S " med "G(S',S)" har vi derfor at (Ey)(y= (iS')G(S',S)) om S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Betegner vi klassen av alle relative sannsynlighetsstrukturer med Γ kan vi definere en funksjon φ ved å sette:

φ = Mg(<S',S> : G(S',S) & SêΓ)

Er da SêΓ har vi at φ(S) er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S.

Fra det vi har skrevet ovenfor og definisjonene av kanonisk relativ sannsynlighetsstruktur og kanonisk preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom fremgår det både φ og ψ er funksjoner og at domenet til φ er klassen av alle relative sannsynlighetsstrukturer, ie. Γ og at domenet til ψ er klassen av alle preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Vi har derfor:

Teorem 11.1 (a) Func(φ) & Dom(φ)=Γ
(b) Func(ψ) & Dom(ψ)=Φ

Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da følger det umiddelbart fra Teorem 9.4 og de definisjonene vi har gitt ovenfor at ψ(S)êΓ. Tilsvarende har man ved hjelp av Teorem 10.3 og Teorem 10.4 at dersom S=<I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur så er φ(S)êΦ, dvs den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom er faktisk en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, det vil si et element i Φ. Det følger fra dette at Teorem 11.1 kan forsterkes til:

Teorem 11.2 (a) φ: Γ → Φ
(b) ψ: Φ → Γ

Anta nå at SêΓ, ie at S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da vil, som man ser fra Teorem 11.2, φ(S)êΦ og ψ(φ(S)) êΓ. Men det følger ved hjelp av Definisjon 10.4 og Teorem 10.6 at ψ(φ(S)) =S om SêΓ. Tilsvarende, anta at S er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, med andre ord at SêΦ. Da har vi ved hjelp av Teorem 11.2 at ψ(S)êΓ og at φ(ψ(S))êΦ. Men ved hjelp av Teorem 10.8 følger at φ(ψ(S)) =S. Dette viser at følgende sats holder:

Teorem 11.3 (a) (AS)(SêΓ → ψ(φ(S))=S)
(b) (AS)(SêΦ → φ(ψ(S))=S)

Fra Teorem 11.1 og Teorem 11.2 fremgår det at ψ bare er en avbildning av Φ inn i Γ og at φ bare er en avbildning av Γ inn i Φ. Det er imidlertid mulig å vise at ψ også er en en-entydig avbildning av Φ på Γ og tilsvarende at φ er en en-entydig avbildning av Γ på Φ. Dette innebærer at følgende sats holder:

© Morten Harboe Rognes 2019

Teorem 11.4 (a) $\varphi : \Gamma$ -(1-1,på) $\rightarrow \Phi$
(b) $\psi : \Phi$-(1-1,på) $\rightarrow \Gamma$

Bevis: Vi har allerede godtgjort at φ er en funksjon fra Γ inn i Φ. La oss vise at den er en-entydig. Anta derfor at (1) <S1,S>, <S2,S>êφ. Da følger siden φ er en funksjon at (2) φ(S1)=S=φ(S2). Vi ønsker å vise at S1=S2. Fra (1) følger at SêΦ. Fra dette, (2) og Teorem 11.3 følger (3) ψ(S)=ψ(φ(S1)) =S1. Tilsvarende har vi at (4) ψ(S)= ψ(φ(S2))=S2. Men fra (3) og (4) har man åpenbart at S1=S2. Dette viser at φ er en-entydig.

På samme måte viser man at ψ er en-entydig. Anta (5) <S1,S>,<S2,S>êψ. Vi må da vise at S1=S2. Fra (5) følger at (6) ψ(S1)= S = ψ(S2) siden ψ er en funksjon. Det følger også at SêΓ. Ved hjelp av Teorem 11.3 og (6) har man da φ(S)=φ(ψ(S1)) =S1 og tilsvarende at φ(S)=φ(ψ(S2))=S2. Men herav har vi igjen at S1=S2. Dette viser at ψ også er en-entydig.

La oss nå vise at φ avbilder Γ *på* Φ. Anta SêΦ for vilkårlig S. Da har vi at ψ(S)êΓ. Men fra Teorem11.3 har vi at (AS)(SêΓ → φ(ψ(S))=S). Det følger at φ(ψ(S))=S & ψ(S)êΓ. Vi har derfor at (ES')(S'êΓ & φ(S')=S). Men dette er nøyaktig hva som menes med at φ avbilder Γ på Φ. Ved hjelp av Teorem 11.3 kan man på en helt tilsvarende måte vise at ψ avbilder Φ på Γ. **QED**.

Et enkelt korollar til Teorem 11.3 og Teorem 11.4 er at φ og ψ er gjensidig inverse funksjoner. Vi har med andre ord at:

Teorem 11.5 (i) $\varphi = \psi;-1$ og $\psi=\varphi;-1$

Bevis: Fra Teorem 11.3 har vi φ(ψ(S))= S om SêΦ. Ved hjelp av Teorem 11.4 følger da ψ(S) = φ;-1(S) og derfor ψ =φ-1. En tilsvarende begrunnelse kan gis for at φ= ψ;-1. **QED**.

§12 Alternative aksiomatiseringer av den svake og den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet.

I §3 definerte vi helt presist to førsteordens teorier, nemlig *den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet* og det vi kalte *den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet*. Som man husker betegner L;e språket til mengdelære. Vi definerte Δ som den predikatmengden som bare inneholder de tre predikatene "w er en logisk mulig verden", "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " og "z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger". Språket L;e utvidet med predikatene i Δ betegnet vi med L;e(Δ). ZFC;u(L;e(Δ)) var da det mengdeteoretiske systemet ZFC;u over L;e(Δ) utvidet med alle instanser av utsondringsaksiomet og substitusjonsaksiomet. I §3 spesifiserte vi en rekke formler i språket L;e, nemlig grunnsetningene W1,W2, E1 - E3, D1 - D8, F1 -F5 og endelig grunnsetningene M1 - M3. Vi betegnet mengden av formler i L;e(Δ) som bare inneholdt formelene W1,W2, E1 - E3, D1 - D8 og F1-F5 med θ;1. Den mengden vi får når θ;1 utvides med de tre aksiomene M1 - M3 kalte vi θ;2. Den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet er da teorien ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1], og den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet er den som fremkommer ved å legge til denne teorien aksiomene M1 - M3 som

© Morten Harboe Rognes 2019

ytterligere ikke- logiske aksiomer, det vil si ZFC;u(L;e(Δ))[θ;2]. Slutningsreglene i de to teoriene er naturligvis bare modus ponens og universell generalisering. Vi skal nå formulere to teorier. Den første er ekvivalent med den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet. Den andre er ekvivalent med den sterke versjonen av denne teorien.

Vi skal først se på en alternativ aksiomatisering av den svake om akseptanse og sannsynlighet. Språket til denne alternative aksiomatiseringen er L;e(Δ) som vi nevnte ovenfor. De ikke-logiske aksiomene i teorien i tillegg til de rent mengdeteoretiske er blandt dem vi har nevnt tidligere, nemlig aksiomene for mulige verdener, W1 og W2, samt aksiomene for enkelhetsrelasjonen E1 - E3. I tillegg til disse aksiomene inneholder den alternative aksiomatiseringen bare ett aksiom, nemlig aksiomet P1 som vi nå skal angi. La oss først gjøre det klart at Uttrykkene "R", "R*", "Ekv;R", "[w];R", "Max(R,y)", "κ(y)" og U er definert nøyaktig som i §3. Man bør også merke seg at disse uttrykkene utelukkende er definert ved hjelp av rent mengde teoretiske predikater og de to predikatene "w er en logisk mulig verden" og "w er en verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ". Sannsynlighetspredikatet er på ingen måte involvert i definisjonene av disse uttrykkene.

La oss nå vende tilbake til vårt nye aksiom P1. Det bør understrekes at vi i det følgende bruker uttrykket "SRom(x,y)" som forkortelse for "x er et sannsynlighetsrom over mengden x". Som det fremgår av hva vi tidligere har skrevet i §7, man kan konsultere Definisjon 7.1 og Definisjon 7.2, er dette et rent mengdeteoretisk begrep. Vi finner det nå hensiktsmessig å betrakte konjunksjonen av de følgende betingelser, åpne setninger, i språket L;e(Δ) og forklare hva de innebærer. Vi betrakter:

(1) Func(f)
(2) Dom(f) Inkl UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI))
(3) (Ay)(yêDom(f) → SRom(f(y),y))

Man ser at disse kravene er helt analoge med kravene (b), (c) og (d) i Definisjon 8.1 i §8.

Det første av disse kravene sier bare at f er en funksjon, noe som ikke i seg selv sier så mye. Det andre kravet sier noe om domenet til denne funksjonen, nemlig som man ser, at dette domenet skal være inkludert i mengden UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI)). Man bør ha helt klart for seg hva dette er for slags mengde. Anta wêI. Da er [w];R mengden av alle de mulige verdenene som er like enkle som verdenen w. Siden Enk;R er en ekvivalensrelasjon over mengden av alle mulige verdener I inndeler den I i en samling ikke-tomme innbyrdes disjunkte ekvivalensmengder som som samlet uttømmer I. Enhver slik ekvivalensmengde a vil være identisk med [w];R for noe wêI. Vi skal kalle disse ekvivalensmengdene for enkelhetsnivåene over I. Som man skjønner er da Pt([w];R) mengden av alle delmengder av enkelhetsnivået [w];R. Pt([w];R) -{ø} er så mengden av alle ikke-tomme delmengder av dette enkelhetsnivået. UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI)) er så unionen av de diverse Pt([w];R) - {ø} ettersom w gjennomløper I. Alt dette innebærer at dersom xêDom(f) så vil x≠ø og det vil finnes en wêI slik at x er inkludert i enkelhetsnivået til w.

Det tredje kravet ovenfor sier at dersom y er med i domenet til f så skal f(y), verdien til funksjonen f for argumentet y, være et sannsynlighetsrom over f.

Vi skulle nå ha klarlagt hva kravene (1) - (3) ovenfor innebærer. Det gjenstår imidlertid et siste krav. Anta f oppfyller kravene (1) - (3). Da er det siste kravet dette:

© Morten Harboe Rognes 2019

(4) $Cd(z,x,y) \leftrightarrow .\ x,y\hat{e}U \& \varnothing \neq \kappa(y)\hat{e}Dom(f) \& r\hat{e}Reell$
$x\Omega\kappa(y)\hat{e}[f(\kappa(y))];2 \ \& \ [f(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

La oss se på hva dette innebærer i det vi forutsetter at f er en funksjon som oppfyller kravene (1) - (3). Kravet innebærer at z er sannsynligheten til utsagnet x relativt til utsagnet y hvis og bare hvis man har at r er et reellt tall og x og y er utsagn. Videre krever vi at snittet av utsagnet x og de enkleste verdnene i y, ie. $x\Omega\kappa(y)$ er med i den naturlige boolske algebraen som inngår som annen komponent i det sannsynlighetsrommet f tilordner utsagnet $\kappa(y)$, med andre ord at $x\Omega\kappa(y)\hat{e}\ [f(\kappa(y))];2$. Endelig må det være tilfelle at sannsynlighetsfunksjonen i det sannsynlighetsrommet som f tilordner $\kappa(y)$, det vil si $[f(\kappa(y))];3$, tilordner $x\Omega\kappa(y)$ det reelle tallet r. Dette innebærer at $[f(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$. Definerer vi C på den måten vi gjorde i §3, nemlig som $C= Mg(<x,y>,r>: Cd(r,x,y))$, kan dette kravet reformuleres slik:

$C=Mg(<<x,y>,r>: x,y\hat{e}U \& \varnothing \neq \kappa(y)\hat{e}Dom(f) \& r\hat{e}Reell$
$x\Omega\kappa(y)\hat{e}[f(\kappa(y))];2 \ \& \ [f(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r))$

Vårt aksiom P1 sier nå ikke noe annet enn at det finnes en funksjon f som oppfyller kravene (1) - (4) som vi nå har spesifisert og kommentert. Grunnsetningen kan formaliseres slik:

P1 $(Ef)(Func(f) \ \& \ (Ay)(y\hat{e}Dom(f) \rightarrow y\hat{e}UN(Mg(Pt([w];R)-\{\varnothing\}: w\hat{e}I))) \ \&$
$(Ay)(y\hat{e}Dom(f) \rightarrow SRom(f(y),y)) \ \&$
$C=Mg(<<x,y>,r>: x,y\hat{e}U \& \varnothing \neq \kappa(y)\hat{e}Dom(f) \& r\hat{e}Reell$
$x\Omega\kappa(y)\hat{e}[f(\kappa(y))];2 \ \& \ [f(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r))$

Den teorien vi nå betrakter er ZFC;u(L;e(Δ)) utvidet med aksiomene W1,W2, E1 - E3 og P1 som nye ikke-logiske aksiomer. Med andre ord teorien: ZFCu(L;e(Δ))[W1,W2,E1 - E3, P1]

Teorem 12.1 Anta α er en formel i L;e(Δ). Da har man at α er et teorem i teorien $T1= ZFCu(L;e(\Delta))[\theta;1]$ hvis og bare hvis α er et teorem i teorien $T2=ZFCu(L;e(\Delta))[a]$ der $a=\{W1,W2,E1 - E3, P1\}$

Bevis: Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 og omvendt. For å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 vil det åpenbart være tilstrekkelig å vise at D1 - D8 og F1 - F5 kan utledes i T2. Fra T2 følger selvfølgelig P1 siden dette er et aksiom i teorien. Fra P1 følger så at det finnes en funksjon f som oppfyller kravene (1) -(4) som vi nevnte ovenfor. Fra dette og definisjonen av preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom som vi innførte i §8 følger det at <I,R,f> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra P1 kan man selvfølgelig også utlede at

$C=Mg(<<x,y>,r>: x,y\hat{e}U \& \varnothing \neq \kappa(y)\hat{e}Dom(f) \& r\hat{e}Reell$
$x\Omega\kappa(y)\hat{e}[f(\kappa(y))];2 \ \& \ [f(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r))$

Da har man <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> i lys av Definisjon 9.1. Fra dette og Teorem 9.1 følger umiddelbart at aksiomene D1 og D2 kan utledes i T2. Videre følger da ved hjelp av Teorem 9.2 at aksiomene D3 - D8 kan utledes i T2. Dette følger fordi de nevnte teoremer er rent mengdeteoretiske og derfor selv er teoremer i T2. Fra Teorem 9.3, som også kan utledes i T2 fordi det er en rent mengdeteoretisk sats, og det forhold at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> følger at F1 -F5 også kan utledes i T2. Vi kan altså utlede alle aksiomene i T1 i T2. Det følger at ethvert teorem i T1 er et teorem i T2.

La oss så vise det omvendte, at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. Det vil være

© Morten Harboe Rognes 2019

tilstrekkelig å vise at P1 kan utledes i T1. Sett S=<I,R,C> der I,R og C er definert som i §3 ved hjelp av de primitive predikatene i T1. Man ser da lett fra definisjonen av "relativ sannsynlighetsstruktur" som gitt ved Definisjon 4.1 i §4 at S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi definerer nå Π som ved Definisjon 10.2 i §10. Det følger da ved hjelp av Definisjon 10.3 at <I,R,Π> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <I,R,C>. Ved hjelp av Teorem 10.3 og Teorem 10.4 har man da at <I,R.Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra dette og Definisjon 8.1 følger det at Π oppfyller kravene (1) - (3) ovenfor. Definer C* som i Definisjon 10.4 i §10. Da følger ved hjelp av Teorem 10.6 at C=C*. Dette innebærer at

$$C = Mg(\langle\langle x,y\rangle,r\rangle: x,y\hat{e}U \ \& \ \emptyset\neq\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi) \ \& \ x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2 \ \&[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r)$$

Fra dette kan man slutte at Π oppfyller kravet (4) som vi nevnte ovenfor. Fra det at Π oppfyller kravene (1) - (4) kan man slutte at P1 er utledbar i T1. Det følger at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. De to teoriene er følgelig deduktivt ekvivalente. **QED**.

Vi skal se på nok en betingelse i tillegg til dem vi har sett på, nemlig (1) - (4). Betingelsen er den følgende:

$$\begin{aligned}(5)\ \ &(Ay)(y\hat{e}Dom(f) \rightarrow (Ax)(x\hat{e}[f(y)];2 \ \& \ [f(y)];3(x)>0 \rightarrow .\\ &\quad x\hat{e}Dom(f) \ \&\\ &\quad [f(x)];2 \ \ Inkl \ [f(y)];2 \ \&\\ &\quad (Az)(z\hat{e}[f(y)];2\rightarrow z\Omega x\hat{e}[f(x)];2) \ \&\\ &\quad (Az)(z\hat{e}[f(x)];2 \rightarrow \ [f(y)];3(z) = [f(y)];3(x)^* \ [f(x)];3(z))))\end{aligned}$$

Hvis f oppfyller betingelsene (1)-(4) har vi at <I,R,f> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Har vi i tillegg at f oppfyller kravet (5) er ethvert element y i domenet til funksjonen f slik at sannsynlighetsrommet f(y) er multiplikativt slik dette begrep ble definert i §8. Føyer vi til dette kravet i aksiomet P1 får vi en sterkere påstand, nemlig denne:

$$\begin{aligned}P2\quad &(Ef)(Func(f) \ \& \ (Ay)(y\hat{e}Dom(f) \rightarrow y\hat{e}UN(Mg(Pt([w];R)-\{\emptyset\}: w\hat{e}I))) \ \&\\ &\quad (Ay)(y\hat{e}Dom(f) \rightarrow SRom(f(y),y)) \ \&\\ &\quad (Ay)(y\hat{e}Dom(f) \rightarrow (Ax)(x\hat{e}[f(y)];2 \ \& \ [f(y)];3(x)>0 \rightarrow .\\ &\quad x\hat{e}Dom(f) \ \&\\ &\quad [f(x)];2 \ \ Inkl \ [f(y)];2 \ \&\\ &\quad (Az)(z\hat{e}[f(y)];2\rightarrow z\Omega x\hat{e}[f(x)];2) \ \&\\ &\quad (Az)(z\hat{e}[f(x)];2 \rightarrow \ [f(y)];3(z) = [f(y)];3(x)^* \ [f(x)];3(z))) \ \&\\ &\quad C=Mg(\langle\langle x,y\rangle,r\rangle: \emptyset \neq \kappa(y)\hat{e}Dom(f)\&\\ &\quad x\Omega\kappa(y)\hat{e}[f(\kappa(y))];2 \ \& \ [f(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) =r))))\end{aligned}$$

Fjerner vi aksiomene D1- D8, F1-F5 og M1 - M3 fra den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet og erstatter disse med P2 får vi en teori som er deduktivt ekvivalent. Man ser forøvrig at P2 i likhet med P1 er en formel i språket L;e(Δ). Vi skal nå vise

Teorem 12.2 Anta α er en formel i L;e(Δ). Da har man at α er et teorem i teorien T1= ZFCu(L;e(Δ))[θ;2] hvis og bare hvis α er et teorem i teorien T2=ZFCu(L;e(Δ))[a] der

© Morten Harboe Rognes 2019

a={W1,W2,E1 - E3, P2}

Bevis: Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 og omvendt. For å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 vil det åpenbart være tilstrekkelig å vise at D1 - D8, F1 - F5 og M1 - M3 kan utledes i T2. Fra T2 følger selvfølgelig P2 siden dette er et aksiom i teorien. Fra P2 følger så at det finnes en funksjon f som oppfyller kravene (1) - (5) som vi nevnte ovenfor. Fra dette og definisjonen av preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom som vi innførte i §8 følger det at <I,R,f> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra P1 kan man selvfølgelig også utlede at

C=Mg(<<x,y>,r>: x,yêU& ø ≠ κ(y)êDom(f)& rêReell
xΩκ(y)ê[f(κ(y))];2 & [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r))

Da har man at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> i lys av Definisjon 9.1. Fra dette og Teorem 9.1 følger umiddelbart at aksiomene D1 og D2 kan utledes i T2. Videre følger da ved hjelp av Teorem 9.2 at aksiomene D3 - D8 kan utledes i T2. Dette følger fordi de nevnte teoremer er rent mengdeteoretiske og derfor selv er teoremer i T2.

Fra Teorem 9.3, som også kan utledes i T2 fordi det er et rent mengdeteoretisk sats, og det forhold at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> følger at F1 -F5 også kan utledes i T2. Vi må også vise at M1- M3 kan utledes. Anta derfor at (i) (Ev)(<v,y>êDom(C)) for vilkårlig y. Da følger ,siden f oppfyller kravet (4), at ø≠κ(y)êDom(f). Siden f oppfyller kravet (5) følger det at f(κ(y)) er multiplikativt. Fra dette og det at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> har man ved hjelp av Teorem 9.4 at

(a) <z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → <z,xΩy> ê Dom(C)

(b) <x,y>ê Dom(C) & C(x,y)> 0 → (<z,xΩy>êDom(C) → <zΩx,y>ê Dom(C)

(c) <z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → C(zΩx,y) = C(z,xΩy)*C(x,y)

holder for alle z,x. Vi har altså at kondisjonalen med (i) som antesedent og konjunksjonen av (a) - (c) som konsekvent holder for alle y,x og z. Men denne kondisjonalen er ekvivalent med M1 - M3.

Vi kan altså utlede alle aksiomene i T1 i T2. Det følger at ethvert teorem i T1 er et teorem i T2.

La oss så vise det omvendte, at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. Det vil være tilstrekkelig å vise at P2 kan utledes i T1. Sett S=<I,R,C> der I,R og C er definert i §3 ved hjelp av de primitive predikatene i T1. Man ser da lett fra definisjonen av "relativ sannsynlighetsstruktur" som gitt ved Definisjon 4.1 i §4 at S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi definerer nå Π som ved Definisjon 10.2 i §10. Det følger da ved hjelp av Definisjon 10.3 at <I,R,Π> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <I,R,C>. Ved hjelp av Teorem 10.3 og Teorem 10.4 har man da at <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra dette og Definisjon 8.1 følger det at Π oppfyller kravene (1) - (3) ovenfor. Definer C* som i Definisjon 10.4 i §10. Da følger ved hjelp av Teorem 10.6 at C=C*. Dette innebærer at

C = Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Fra dette kan man slutte at Π oppfyller kravet (4) som vi nevnte ovenfor. Det gjenstår å vise

© Morten Harboe Rognes 2019

at f(y) er multiplikativt for ethvert utsagn yêDom(Π). Nå har vi at M1 - M3 holder i T1 siden de er aksiomer i denne teorien. Det følger at <I,R,C> oppfyller disse kravene. Anta nå at yêDom(Π) for vilkårlig y. Da har vi at y=κ(y)êDom(Π). Siden y er er et utsagn oppfyller det kravene M1-M3 for alle x,z. Fra dette og Teorem 10.7 følger at Π(κ(y))=Π(y) er multiplikativt, dvs. oppfyller konsekventen i krav (5). Men siden y var vilkårlig følger det at Π oppfyller krav (5). Vi har nå vist at Π oppfyller alle kravene (1) - (5).

Fra dette kan man slutte at P2 er utledbar i T1. Det følger at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. De to teoriene er følgelig deduktivt ekvivalente. **QED**.

§13 Noen avsluttende refleksjoner

Det viktigste i dette skrift har vært å gi en systematisk og presis beskrivelse og definisjon av de to teoriene som vi har omtalt som den svake (begrensede) teorien om akseptanse og sannsynlighet og den sterke (fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet. I tillegg til dette har vi fremlagt, i Del II, en rekke formelle resultater om forholdet mellom det vi på den ene side har kalt relative sannsynlighetsstrukturer og på den annen side den strukturklassen som vi kalte for preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Som man ser fra definisjonen av en relativ sannsynlighetsstruktur av speiler denne typen av strukturer nøyaktig strukturen til den begrensede teorien om akseptanse og sannsynlighet. I lys av de resultater vi har bevist ovenfor i Del II om sammenhengen mellom relative sannsynlighetsstrukturer og preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom innebærer dette at vi kan formulere visse alternative aksiomatiseringer til våre to hovedteorier. Dette resultat er ikke trivielt og kaster naturlig nok lys over våre hovedteorier. Man forstår tross alt en teori bedre, ikke bare når man får et dypere innblikk i hva som følger fra den, men også når man kan se hvordan teorien kan formuleres på radikalt andre måter.

Noen ytterligere refleksjoner bør vies til det vi i vårt arbeid har kalt prinsippet om indre koherens, harmoni og enkelhet, eller det som vi kortere omtalte som enkelhetsprinsippet. Vi ga to formuleringer av dette prinsipp i forbindelse med kommentarene til vår hovedteori. Den ene formuleringen var denne:

Et utsagn x er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har hvis og bare hvis de enkleste, mest harmoniske og koherente verdenene i sannhetsmengden til utsagnet y er inkludert i sannhetsmengden til utsagnet x og det faktisk finne visse enkleste, mest harmoniske og koherente verdener i sannhetsmengden til y.

Den andre formuleringen, som tidligere ble gitt i formalisert form, var denne:

Det er fornuftig å akseptere et utsagn x gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har hvis og bare hvis det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er kompatibelt med utsagnet y og utsagnet x er implisert av konjunksjonen av disse kausallovene og utsagnet y.

Disse to prinsippene er ekvivalente om vi utvider teorien om akseptanse og sannsynlighet med aksiomene L1 - L6 slik vi gjorde rede for tidligere og definerer enkelhetsrelasjonen slik som vist i §5.3. Strengt tatt er da aksiomene E1 - E3 overflødige i den resulterende teori siden de kan utledes fra de øvrige aksiomene og denne definisjonen av enkelhetsrelasjonen. Fra teorien om akseptanse og sannsynlighet alene (hva enten det dreier seg om den sterke eller svake

© Morten Harboe Rognes 2019

versjonen) kan man imidlertid ikke utlede det siste prinsippet siden predikatet "x er en kausallov som gjelder i verdenen w" og de andre predikatene vi nevnte i §5.3 ikke inngår i vokabularet til disse teoriene.

Begge prinsippene ovenfor ovenfor gir oss et kriterium for når det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til et annet y. Selvom disse kriteriene ikke på noen måte er effektive eller operasjonelle gir de en likevel visse vink om hva som i praksis er fornuftig å akseptere gitt en viss evidens. Vi ga en ganske omfangsrik mengde med eksempler i §5.4 og behøver derfor ikke å gi flere eksempler akkurat her.

Vi ga tidligere, i §5.5, en meget generell definisjon av hva som menes med en induktiv slutning. Det skulle være unødvendig å gi denne definisjonen på nytt. Det er imidlertid vanskelig å se hvordan man kan argumentere for at denne definisjonen er inadekvat eller uhensiktsmessig. Den synes å omfatte, noe vi skissemessig forsøkte å vise, alt det som tradisjonelt har blitt karakterisert som induktive slutninger og den ekskluderer de slutningene som er logisk gyldige, noe som åpenbart er rimelig. Med andre ord kan alle konsistente slutninger inndeles i to gjensidig eksklusive klasser: de deduktive (som er logiske gyldige) og de induktive (som ikke er logisk gyldige).

Nåvel. Gitt dette skillet mellom logisk gyldige og induktive slutninger virker det ytterst rimelig og inndele de induktive slutningene i to underklasser, nemlig de akseptable og de uakseptable alt ettersom konklusjonen i en induktiv slutning er et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til konjunksjonen av premissene i slutningen eller ikke. Dette innebærer at teorien om de akseptable induktive slutningene kan reduseres til teorien om akseptanserelasjonen og at det derfor finnes en apriori teori om akseptable induktive slutninger. Dette i sin tur innebærer at det finnes et system av akseptable induktive slutninger og derfor noe som med full rett kan kalles induktiv logikk. Man kan trygt si at dette er i overensstemmelse med allminnelig sunn fornuft. Ordene "fornuft" og "fornuftig" er ikke superord som bare filosofer har rett til å bruke, analysere og utlegge. De har en like prosaisk bruk som ord i likhet med "tro", "vite", "sten" og "hvis". Enhver lærer å bruke disse ordene og talløse andre som inngår i vårt språk, noen mindre bra, andre bedre, men ingen spesielle privilegier er gitt filosofene som gir dem spesiell rett til å bestemme deres betydning. Like opplagt som det er for en uhildet person at en sten nødvendigvis må oppta en viss plass i rommet, eller at en sten har romlig utstrekning, like opplagt må det være at en person er ufornuftig om vedkommende tror at en flaske fylt med vann er slik at vannet ikke vil renne ut av den om man snur flasken opp ned og tar ut korken, forutsatt at vedkommende vet alt det som vanlige folk vet ved det nåværende tidspunkt. Det følger derfor i kraft av den betydning som ordet "fornuftig" har at relativt til den kunnskap som de fleste er i besittelse av er det fornuftig å akseptere at en fylt vannflaske med kork kan tømmes på normalt vis ikke bare om fjorten dager, men også om hundre år om forholdene på jordens overflate er som nå. At dette er således er ikke noe man finner ut ved empiriske undersøkelser, eksperimenter eller ved innsamling av statiske data, men utelukkende ved å reflektere over betydningen til ordet "fornuftig". At man kan innse nødvendige sannheter ved dyptgående refleksjon over betydningen til ord er naturligvis noe visse filosofer, for eksempel Quine, benekter. Men det er noe man ikke uten videre kan betrakte som et argument mot det standpunkt som presenteres her.

Når det gjelder hva som er fornuftig å akseptere relativt til en gitt evidens (forutsatt at det er fornuftig å akseptere noe) synes det rimelig å hevde: (i) at det er fornuftig å akseptere denne evidens, og (ii) at det er fornuftig å akseptere enhver påstand som logisk sett følger fra

© Morten Harboe Rognes 2019

denne evidens. Dette er helt i overenstemmelse med den teorien om akseptanse og sannsynlighet som har blitt fremsatt her.

En langt sterkere tese er den følgende: Nemlig de to påstander vi har nevnt ovenfor supplementert med denne tesen, nemlig: Det *eneste* som det er fornuftig å akseptere relativt til et utsagn y som representerer all tilgjengelig evidens er det som logisk sett følger fra utsagnet y samt dette utsagnet y selv.

Denne sterkere tesen kan formaliseres innenfor den rammen vi har arbeidet med her på følgende måte:

(+) $Ba(x,y) \leftrightarrow (x,y \hat{e} U \ \& \ y \neq \emptyset \ \& \ y \ Inkl \ x)$

Man ser at denne påstanden er en bikondisjonal. Dersom den er riktig kunne den i prinsippet brukes som en definisjon av akseptanserelasjonen Ba. Tesen er imidlertid svært sterk. Legges (+) til som et nytt aksiom til den akseptanseteorien vi har beskrevet utførlig tidligere kan man vise at den impliserer at enhver logisk mulig verden har nøyaktig den samme grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som enhver annen mulig verden. Den impliserer også at ingen av de eksemplene vi tidligere har gitt på utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har nå er utsagn som det er fornuftig å akseptere. For det tredje impliserer den, om man definerer "akseptabel induktiv slutning" på den måten som vi har gjort, at induktive slutninger i det vesentlige faller sammen med deduktive slutninger, eller for å være mer nøyaktig, at akseptable induktive slutninger i den betydning vi har innført egentlig ikke finnes.

Hvis man kort skal karakterisere det empiristiske standpunkt i filosofien kan man si at en empirist hevder at all kunnskap må kunne tilbakeføres til erfaringen. Noe forenklet kunne man si at hva en person vet ved et gitt tidspunkt *enten* må være noe vedkommende vet ved direkte sanseiaktagelse ved dette tidspunkt *eller* så må det være noe som logisk sett følger fra det vedkommende vet ved direkte sanseiaktagelse (ved dette tidspunkt). Dette gir en ikke bare en tilstrekkelig betingelse for å vite noe, det gir en enn mer en nødvendig betingelse. At disse betingelsene er tilstrekkelige for å vite noe innser enhver. At de derimot er nødvendige er ikke noe som på noen måte kan sies å være innlysende. Vi skal imidlertid ikke gi noen mer utførlig drøftelse av denne tesen på dette punkt.

La oss nå kalle, men bare i de følgende avsnitt, alle de utsagn som man ved tidspunktet t vet at er tilfelle ved direkte sanseiaktagelse for den evidens man har ved tidspunktet t. Den empiristiske doktrine kan da i lys av denne definisjonen omformes slik: Et utsagn representerer viten ved et gitt tidspunkt t hvis og bare hvis det enten er en del av den evidens man har ved tidspunktet t eller logisk sett følger fra de påstander som er elementer i denne evidens.

Det følger fra den empiristiske tese, og det skulle være ganske åpenbart, at generelle, kausalt pregede, lovmessigheter, hva enten de er av rent teoretisk natur eller empiriske lover, ikke er påstander man ved noe tidspunkt kan ha sikker viten om. Uansett ved hvilket tidspunkt man befinner seg og uansett hvor omfattende den evidens man har er ved dette tidspunkt vil det ikke være mulig å vise at disse lovmessigheter logisk sett kan utledes fra denne evidens.

Nå er den empiristiske tese en teori om viten. Den sier ikke noe direkte om hva fornuft er eller hva det er fornuftig å akseptere gitt en viss evidens. Fra en empiristisk synsvinkel tildeles imidlertid den menneskelig fornuft en ganske beskjeden rolle. Det man kan innse ved fornuften er i høyden logiske og matematiske sannheter. Det man derfor kan finne ut ved hjelp

© Morten Harboe Rognes 2019

av fornuften er kun disse fornuftssannhetene selv, samt hva som følger fra dem sammen med den evidens man har. Dette innebærer at for en empirist vil det være fornuftig å akseptere en påstand ved et gitt tidspunkt t hvis og bare hvis denne påstanden følger logisk fra den evidens man har ved tidspunktet t. Sagt på en annen måte: det er fornuftig å akseptere en påstand x relativt til den evidens man har ved tidspunktet t hvis og bare hvis utsagnet x er en logisk konsekvens av den evidens man har ved dette tidspunktet t. Erstatter man i den siste setningen uttrykket "den evidens man har ved tidspunktet t" med "utsagnet y", og legger til at y må være et konsistent utsagn, får man formuleringen (+) ovenfor. Dette innebærer at (+) kan oppfattes som et generelt prinsipp som passer meget godt sammen med den empiristiske grunntanke.

Vi nevnte ovenfor endel konsekvenser av (+). En konskevens var at dersom tesen legges til vår teori om akseptanse og sannsynlighet impliserer den at enkelhetsrelasjonen er en ekvivalensrelasjon over mengden av de mulige verdener og at mengden av mulige verdener utgjør den eneste ekvivalensklasse som er indusert av denne relasjonen. Dette er åpenbart absurd. Man står derfor strengt tatt ovenfor to alternativer. Enten forkaster man den (begrensede eller fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet som vi har presentert eller så aksepterer man denne teorien. I det siste tilfelle må man forkaste (+), og om (+) er implisert av den empiristiske tese vi har nevnt ovenfor, må man også forkaste denne. Holder man imidlertid fast ved det empiristiske standpunkt er det klart at enkelhet for en empirist ikke i seg selv kan brukes til å rettferdiggjøre teorier som kronisk går utover den evidens man har ved noe tidspunkt. Man kan kun velge den enkleste teori av rent tankeøkonomiske grunner: En teori som er enklere enn en annen er som oftest lettere å teste, den er mindre anstrengende å tenke igjennom, den er lettere å huske og koster mindre av slit og strev om man skal forklare den for andre forskere. Kort sagt er den mer behagelig å arbeide med, og gir en mer valuta for mindre strev. For en empirist har ikke enkelhet noen dypere erkjennelsesteoretisk funksjon enn akkurat dette.

Det er også endel andre konsekvenser av det empiristiske standpunkt som kan nevnes. Gitt at det man vet ved ethvert tidspunkt er det man vet ved sanseiaktagelse ved dette tidspunkt pluss det som logisk følger fra de data man har fått ved sanseiaktagelse kan man trekke den slutning at en generell nomotetisk teori alltid går utover totaliteten av det man vet. Den får derfor preg av å være en evigvarende hypotese såsant den ikke strider mot de nye iaktagelser man etterhvert gjør. Det følger derfor at uansett hvor mange iherdige forsøk på gjendrivelse en generell hypotese har overlevd må den ved ethvert tidspunkt betraktes med mistenksomhet fordi det alltid er mulig at man i fremtiden kan gjøre iaktagelser som tvinger en til å revidere den. Enhver teori eller hypotese som stemmer med de iaktagelser som man så langt har gjort må derfor anses som en tentativ hypotese, en mer eller mindre dristig gjetning. Dette kan forekomme en, mildt sagt, mindre rimelig. Ohms lov, lovene i elektristetslæren eller den rent geometriske optikk (for bare å trekke frem noen vilkårlige eksempler) og mange andre empiriske lovmessigheter har ikke, i lys av den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt, karakter av å være gjetninger eller mer eller mindre grunnløse antagelser. En ingeniør som planlegger strømforsyningen til en avsidesliggende bygd vil neppe oppfatte elektristetslærens grunnsetninger som "tentative hypoteser". Ingen har i løpet av den tid man har bygd kraftledninger gitt noen evidens for at den praktiske anvendelse av disse teoretiske lovene ikke fungerer, og man ville åpenbart bli betraktet som en temmelig eksentrisk person om man for *alvor* betvilte dette. Forøvrig gjelder dette alle de eksemplene på empiriske lovmessigheter som vi nevnte tidligere (i §5.4). Gitt den evidens man har nå er det ingen grunn til å betvile dem, men tvertimot all mulig grunn til å akseptere dem. Men dette

© Morten Harboe Rognes 2019

innebærer såvidt vi kan se at det ikke er korrekt å se på dem som "tentative hypoteser " eller "dristige gjetninger".

La oss avslutte våre refleksjoner med noe vi har nevnt og delvis understreket tidligere. Fra det forhold at det det er fornuftig å akseptere elektrisitetslærens eller den geomtriske optikks lover relativt til den evidens man har ved det nåværende tidspunkt følger det ikke på noen måte at det er fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den evidens man sitter inne med om femti eller hundre år inn i fremtiden. Bildet kan da være et annet. Man bør imidlertid merke seg at man fra dette forhold ikke kan slutte at det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har nå at vi en eller annen gang i fremtiden vil ha evidens som strider mot de lovene som det nå er fornuftig å akseptere. Heller ikke følger det fra det at det er fornuftig å akseptere disse lovene nå at det vil være fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den evidens man har ved ethvert senere tidspunkt. Endelig er det verdt å gjøre oppmerksom på at selvom det er logisk mulig å tenke seg at man i fremtiden har evidens som falsifiserer en teori som er konsistent med den evidens man har nå, så kan man ikke fra dette slutte at det ikke er fornuftig å akseptere denne teorien. Fra det forhold at det er logisk mulig at jeg sover nå følger det ikke at det er usikkert at jeg er våken nå, like lite som det fra det faktum at jeg er våken nå følger at det er logisk nødvendig at jeg er våken.

© Morten Harboe Rognes 2019

Referanser

© Morten Harboe Rognes 2019

Referanser

Carnap [1]	Carnap, Rudolf, *Logical Foundations of Probability*, The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, second edition 1962
Hansson[1]	Hansson, Bengt , "Choice structures and preference relations", Synthese,Vol 18, 1968, pp 443-458
Hansson[2]	Hansson, Bengt , "Fundamental axioms for preference relations", Synthese, Vol 18, 1968, pp 423-442
Hansson[3]	Hansson, Bengt , "An Analysis of Some Deontic Logics", Noûs, Vol III, no 4, 1969, pp 373-398
Popper [1]	Popper, Karl R., *Objective Knowledge,* Oxford Clarendon Press, Oxford, 1971
Popper [2]	Popper, Karl R., *The Logic of Scientific Discovery*, Harper & Row, Harper Torchbooks, second edition, New York,1968
Rognes [1]	Rognes, Morten Harboe, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2]	Rognes, Morten Harboe, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3]	Rognes, Morten Harboe, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [4]	Rognes, Morten Harboe. *Egenskaper. Del I.* Upublisert manuskript, 1986
Rognes [5]	Rognes, Morten Harboe. *Egenskaper. Del II (Bevis for teoremer)* , Upublisert manuskript, 1987
Rognes [6]	Rognes, Morten Harboe. *Aksepterbarhet og troverdighetsgrad* , Upublisert manuskript, 2013
Rognes [7]	Rognes, Morten Harboe. *Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner* , Upublisert manuskript, 2016
Rognes [8]	Rognes, Morten Harboe. *Om de forkunnskaper som trengs for å lese mine arbeider,* Upublisert manuskript, 2009
Rognes [9]	Rognes, Morten Harboe. *Om notasjonen som benyttes i mine arbeider,* Upublisert manuskript, 2008
Shoenfield [1]	Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic*. London. Addison-Wesley Publishing Company. 1967
Takeuti [1]	Takeuti, Gaisi and Zaring, W.M, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971
von Wright [1]	von Wright, Georg Henrik , "The paradoxes of confirmation", Theoria, Vol 3, 1965, pp 255 - 274
von Wright [2]	von Wright, Georg Henrik , *The Logical Problem of Induction*, Oxford, 1941
Wittgenstein [1]	Wittgenstein, Ludwig, *Tractatus logico-philosophicus*, Surkamp,1963

© Morten Harboe Rognes 2019